

Beiträge
zur Theorie der singulären Integrale
bei Funktionen von mehreren Variablen
(Teile I und II)

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

VORGELEGT DER

PHILOSOPHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT BASEL

VON

ROLF CONZELMANN

AUS BASEL

1948

ART. INSTITUT ORELL FÜSSLI A.-G.
ZÜRICH

Beiträge
zur Theorie der singulären Integrale
bei Funktionen von mehreren Variablen
(Teile I und II)

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

VORGELEGT DER

PHILOSOPHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT BASEL

VON

ROLF CONZELMANN

AUS BASEL

1 9 4 8

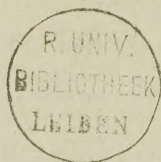
A R T. I N S T I T U T O R E L L F Ü S S L I A.-G.

Z Ü R I C H

Genehmigt von der Philosophisch-naturwissenschaftlichen
Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. A. Ostrowski
und Dr. A. Speiser.

Basel, den 30. April 1946.

Prof. Dr. A. Speiser
Dekan



Auszug aus
Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. XIX, fasc. 4
und Vol. XXI, fasc. 4

Inhaltsübersicht

Erster Teil

Seite

§ 1.	Einleitung	279
§ 2.	Fundamentallemma, Darstellung der Funktion	283
§ 3.	Fundamentallemma und Darstellung der Funktion bei gleichmäßiger Konvergenz	286
§ 4.	Ein Hilfssatz von <i>Camp</i>	289
§ 5.	Darstellung der partiellen Ableitung im Falle des totalen Differentials	290
§ 6.	Charakterisierung der Verschiebungskerne	293
§ 7.	Totalstetige Verschiebungskerne	294
§ 8.	Ein Satz über Verschiebungskerne	297
§ 9.	Verallgemeinerung auf gleichmäßige Konvergenz	301
§ 10.	Differentiationssatz im Falle des totalen Differentials	303
§ 11.	Differentiationssatz im Falle der <i>H</i> -Ableitung	303
§ 12.	Differentiationssatz im Falle der <i>O</i> -Ableitung	306
§ 13.	Vertauschbarkeitskriterien	311
	Literaturverzeichnis	315

Zweiter Teil

§ 1.	Einleitung	270
§ 2.	Hilfssätze	271
§ 3.	Differentiationssätze im Falle des totalen Differentials und der <i>H</i> -Ab- leitung für Produktkerne	273
§ 4.	Differentiationssätze im Falle der <i>O</i> -Ableitung für Produktkerne . .	276
§ 5.	Bemerkungen zu den Sätzen V und VI	279
§ 6.	Produktkerne vom <i>Stieltjes-Hahnschen</i> Typus	280
§ 7.	Beweis des Satzes VII: Behauptungen α) und β)	283
§ 8.	Fortsetzung des Beweises: Behauptungen γ) und δ)	285
§ 9.	Produktkerne vom <i>Poisson-Hahnschen</i> Typus	289
§ 10.	Beweis des Satzes VIII, erste Hälfte	293
§ 11.	Beweis des Satzes VIII, zweite Hälfte	298
	Verzeichnis der besonderen Termini	301



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Beiträge zur Theorie der singulären Integrale bei Funktionen von mehreren Variablen I

Von ROLF CONZELMANN, Basel

§ 1. Einleitung

1. Mit der Frage, eine in einem Intervall J gegebene Funktion f mit Hilfe eines „Kerns“ K in der Gestalt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J f(\xi) K(\xi, x; n) d\xi \quad (1.1)$$

darzustellen, befaßt sich die Theorie der singulären Integrale, die hauptsächlich von *H. Lebesgue*¹⁾ auf breiter Basis systematisch entwickelt und auch zu einem gewissen Abschluß gebracht worden ist. Weitere bedeutende Verallgemeinerungen und Vertiefungen verdankt man *I. W. Hobson*²⁾ und *H. Hahn*³⁾. Letzterer hat insbesondere die Frage der „Differenzierbarkeit der Grenzrelation (1.1)“ eingehend untersucht, wobei wir (1.1) als s -mal differenzierbar bezeichnen wollen, wenn — unter x ein beliebiger Punkt aus dem offenen Intervall J verstanden, in welchem f s -mal differenzierbar ist — die $s + 1$ Relationen

$$\left(\frac{d^\sigma f(\xi)}{d\xi^\sigma} \right)_{\xi=x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J f(\xi) \frac{\partial^\sigma K(\xi, x; n)}{\partial x^\sigma} d\xi \quad (\sigma = 0, 1, \dots, s) \quad (1.2)$$

gleichzeitig bestehen.

2. Es ist zu erwarten, daß die entsprechenden Probleme sich auf analoge Weise auch in mehreren Dimensionen behandeln lassen. *B. H. Camp*⁴⁾ hat in großer Allgemeinheit eine Übertragung der auf (1.1) bezüglichen Sätze in den m -dimensionalen Raum ($m > 1$) durchgeführt. Was die Relationen (1.2) anbetrifft, so werden naturgemäß partielle Ableitungen an die Stelle der gewöhnlichen treten müssen. Eine allgemeine Formulierung für $m > 1$ Dimensionen findet sich meines Wissens nur in einer Arbeit von *Th. Radaković*⁵⁾, allerdings unter sehr speziellen Annahmen.

¹⁾ *H. Lebesgue* (I). Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich jeweils auf das Literaturverzeichnis am Schluß dieser Arbeit.

²⁾ *I. W. Hobson* (II), pp. 422—475.

³⁾ *H. Hahn* (I).

⁴⁾ *B. H. Camp* (I).

⁵⁾ *Th. Radaković* (I).

Insbesondere wird dort von den mit ihren Ableitungen darzustellenden Funktionen f vorausgesetzt, daß sie selbst im ganzen m -dimensionalen Grundintervall J stetig seien und daß ihre sämtlichen partiellen Ableitungen bis zur s -ten Ordnung in der Umgebung des für die Darstellung gewählten Punktes ebenfalls stetig seien.

3. Unter Beschränkung auf die ersten partiellen Ableitungen verfolgt die vorliegende Arbeit das Ziel, nunmehr für möglichst allgemeine Funktionen f eine Übertragung von (1.2) in mehrere Dimensionen vorzunehmen.

Es mögen im folgenden P, Q Punkte im m -dimensionalen Raum bedeuten. Benutzen wir dann die Symbolik $P(\xi_1, \dots, \xi_m)$ um die Charakterisierung von P durch die m rechtwinkligen karthesischen Koordinaten $\xi_1, \dots, \xi_m$ zum Ausdruck zu bringen, und bezeichnet (J) die Gesamtheit der inneren Punkte des m -dimensionalen Intervalls J , so können wir unsere Aufgabe etwas präziser folgendermaßen formulieren: Es sind die Relationen von der Gestalt

$$f(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J f(P) K(P, Q; n) dP \quad \left\{ \begin{array}{l} P = P(\xi_1, \dots, \xi_m) \\ Q = Q(x_1, \dots, x_m) \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

$$\left(\frac{\partial f(P)}{\partial \xi_\mu} \right)_{P=Q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J f(P) \frac{\partial K(P, Q; n)}{\partial x_\mu} dP \quad \left\{ \begin{array}{l} Q < (J) \\ \mu = 1, 2, \dots, m \end{array} \right\} \quad (1.4)$$

zu diskutieren, und zwar, indem für den Kern K notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben werden, daß solche Relationen für alle Funktionen einer bestimmten Klasse richtig sind.

4. Von den verschiedenen seit *Lebesgue* in dieser Theorie üblicherweise betrachteten Funktionsklassen habe ich für die vorliegende Untersuchung jene beiden herausgegriffen, welche die interessantesten Resultate erwarten ließen. Nämlich

F_1 , die Klasse der im Grundintervall (nach *Lebesgue*) integrierbaren Funktionen und

F_2 , die Klasse der im Grundintervall beschränkten meßbaren Funktionen.

5. Für die Gültigkeit einer oder mehrerer der Relationen (1.4) für eine Funktion f aus der Klasse F_1 oder F_2 spielt die Wahl der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über f in Q eine entscheidende Rolle.

Zunächst ist man versucht, etwa die Stetigkeit von f und die bloße Existenz der partiellen Ableitungen f'_{ξ_μ} ($\mu = 1, \dots, m$) in Q vorauszusetzen. Eine Funktion mit diesen Eigenschaften, die außerdem zur Klasse F_2 gehört, sei für den Augenblick mit f^* bezeichnet. Man erkennt aber sogleich, daß es keinen einzigen Kern K geben kann, so daß auch nur eine der Relationen (1.4) für jede Funktion f^* bestehen könnte.

Um dies einzusehen, wählen wir der Einfachheit halber $m = 2$ Dimensionen und $Q \equiv O$ als den Nullpunkt des rechtwinkligen $\xi_1 \xi_2$ -Systems. Sodann betrachte man die Funktion f^* , die folgendermaßen definiert ist: Es sei $f^* = \xi_1$ auf der ξ_1 -Achse und $f^* = \xi_2$ auf der ξ_2 -Achse, und in allen übrigen Punkten der $\xi_1 \xi_2$ -Ebene sei $f^* = 0$. f^* ist offenbar stetig im Nullpunkt, und es gilt $f^*(O) = 0$, $f'^*_{\xi_1}(O) = 1$, $f'^*_{\xi_2}(O) = 1$. Da aber f^* bis auf eine Nullmenge verschwindet in irgendeinem vorgegebenen Rechteck J , das den Nullpunkt im Inneren enthalten möge, sind alle in den Relationen (1.3), (1.4) auftretenden Integrale $\equiv 0$ und daher auch die Grenzwerte für $n \rightarrow \infty$. Also gilt (1.3) aber keine einzige der Relationen (1.4). Und nach diesem Prinzip läßt sich natürlich auch im Falle $m > 2$ und $Q \neq O$ eine Funktion f^* mit den entsprechenden Eigenschaften konstruieren.

6. Dagegen werden wir zeigen, daß es, in allen von uns betrachteten Fällen, z. B. sicher ausreichend ist, für f die Existenz eines totalen Differentials in Q vorauszusetzen.

Man sagt bekanntlich von einer Funktion $f(\xi_1, \dots, \xi_m)$, sie besitze im Punkte $Q(x_1, \dots, x_m)$ ein totales Differential, wenn für f die Darstellung gilt

$$f(\xi_1, \dots, \xi_m) = f(x_1, \dots, x_m) + \sum_{\mu=1}^m \alpha_\mu (\xi_\mu - x_\mu) + o(|PQ|), \quad (1.5)$$

wo $|PQ|$ hier wie auch später die Distanz der Punkte $P(\xi_1, \dots, \xi_m)$ und $Q(x_1, \dots, x_m)$ bedeutet. α_μ bezeichnet die partielle Ableitung von f nach ξ_μ in Q .

7. Von ganz besonderem Interesse ist nun der Fall, wo eine bestimmte Variable vor den anderen in dem Sinne ausgezeichnet wird, daß wir die Existenz bloß einer einzigen der m Relationen (1.4) fordern, z. B. jener, die sich auf $\mu = 1$ bezieht.

Es ist klar, daß im letzten Fall für f die Annahme eines totalen Differentials, also einer bezüglich allen Variablen symmetrischen Bedingung, nicht mehr am Platze ist. Es liegt vielmehr im Wesen der Dinge, an Stelle des totalen Differentials einen geeigneten anderen, einseitigen, also im obigen

Beispiel die Koordinate ξ_1 bevorzugenden Differentiationsbegriff einzuführen. Einer solchen Forderung entspricht der von Herrn *Ostrowski* geprägte⁶⁾ und auch in diesem Zusammenhang⁷⁾ benutzte Begriff der „gleichmäßigen Differenzierbarkeit“ nach einer Variablen. Um Mißverständnissen vorzubeugen, wollen wir im folgenden anstatt „gleichmäßige Differenzierbarkeit“ lieber die Bezeichnung „*O*-Differenzierbarkeit“ gebrauchen⁸⁾.

Wir sagen, eine Funktion $f(\xi_1, \dots, \xi_m)$ habe im Punkt $Q(x_1, \dots, x_m)$ eine *O*-Ableitung nach ξ_1 , wenn

$$\frac{f(\xi_1, \dots, \xi_m) - f(x_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{\xi_1 - x_1} \rightarrow f'_{\xi_1}(x_1, \dots, x_m) \quad (1.6)$$

unter der Voraussetzung

$$(\xi_1 - x_1) \rightarrow 0, \quad |\xi_\mu - x_\mu| \leq |\xi_1 - x_1| \quad (\mu = 2, \dots, m) \quad (1.7)$$

gilt. Und indem man ξ_1 mit ξ_μ vertauscht, erhält man die Definition für die *O*-Ableitung nach ξ_μ .

8. Im Verlauf der Arbeit hatte es sich gezeigt, daß neben dieser *O*-Differenzierbarkeit ein noch stärker nach der Seite der Gleichmäßigkeit hin orientierter Differentiationsbegriff sich einzuführen lohnt, der von *I. W. Hobson*⁹⁾ formuliert, jedoch mit keinem Namen bedacht wurde.

Wir wollen sagen, die Funktion $f(\xi_1, \dots, \xi_m)$ besitze im Punkte $Q(x_1, \dots, x_m)$ eine *H*-Ableitung nach ξ_1 , wenn (1.6) unter der Voraussetzung

$$|PQ| \rightarrow 0 \quad (1.8)$$

gilt. — Ist f in einem Punkt *H*-differenzierbar nach ξ_1 , so ist offenbar f in diesem Punkt stets auch *O*-differenzierbar nach ξ_1 . —

9. So werden denn im folgenden die Sätze über die Relationen (1.3), (1.4) verschieden ausfallen, je nachdem die darzustellende Funktion im „singulären Punkt“ ein totales Differential, eine *H*-Ableitung oder eine *O*-Ableitung nach einem ξ_μ besitzt.

⁶⁾ *A. Ostrowski* (II).

⁷⁾ *A. Ostrowski* (I).

⁸⁾ Über die Beziehung zwischen totalem Differential und *O*-Ableitung orientiert Fußnote 31.

⁹⁾ *I. W. Hobson* (I), p. 419.

Nach Aufstellung einer geeigneten Definition für die Gleichmäßigkeit obiger Differentiationsbegriffe in einer Punktmenge werden die gewonnenen Sätze jeweils auch für die gleichmäßige Konvergenz der Relationen (1.3), (1.4) in dieser Menge formuliert.

Anwendungen der hier entwickelten Theorie auf die bekanntesten der bis heute untersuchten Kerne gebe ich im zweiten Teil dieser Beiträge.

Der Einfachheit halber sind im folgenden für die Darstellung stets $m = 2$ Variable benutzt worden. Jedoch lassen sich unsere Sätze analog für beliebig viele Variable formulieren und beweisen.

Es sei noch bemerkt, daß die herangezogenen Beweismethoden im Bereich jener Hilfsmittel liegen, deren sich die übliche Theorie der singulären Integrale zu bedienen pflegt. An einigen Stellen konnten die von *H. Hahn* für eine Dimension angestellten Überlegungen direkt auf mehrere Dimensionen übertragen werden.

Die im folgenden aufgeführten Hauptsätze sind fortlaufend numeriert. Mit Ia), Ib) usw. bezeichnen wir der Kürze halber Voraussetzung a) bzw. b) des Satzes I.

Im Interesse einfacher und kurzer Formulierung der Sätze und Beweise sah ich mich zur Einführung einer Reihe von Bezeichnungen und Begriffen gezwungen. Ein Verzeichnis dieser besonderen Termini folgt am Ende des zweiten Teils.

Die vorliegende Arbeit entstand unter der Anleitung von Herrn Prof. Dr. *A. Ostrowski*. Für die Unterstützung, die mir dabei von meinem hochverehrten Lehrer zuteil geworden ist, möchte ich hier meinen herzlichsten Dank aussprechen.

§ 2. Fundamentallemma, Darstellung der Funktion

10. In diesem Paragraphen werden zwei bekannte Sätze angeführt. Um eine möglichst einfache Formulierung zu gewinnen, wollen wir uns der folgenden Begriffe und Bezeichnungen bedienen:

Unter einem (zweidimensionalen) Kern soll eine auf einem achsenparallelen, abgeschlossenen Grundrechteck R vorgegebene Folge von Funktionen des Punktes P

$$\varphi(P, n) \quad n = 1, 2, \dots$$

verstanden werden, wobei $\varphi(P, n)$ für jedes n als über R integrierbar¹⁰⁾ vorausgesetzt ist und bloß bis auf eine Nullmenge $\mathfrak{N}_n$ auf R definiert zu

¹⁰⁾ Die Wörter „integrierbar, integrabel, summierbar“ sind im folgenden immer im Sinne von *Lebesgue* zu verstehen.

sein braucht. — Später werden wir neben R auch das Symbol (R) benutzen, worunter die Gesamtheit aller inneren Punkte des Rechtecks R verstanden wird. —

Der Kern φ heiße auf R fast beschränkt, wenn eine Konstante M existiert, so daß bis auf Nullmengen $\mathfrak{N}_n$ für alle Punkte P von R

$$|\varphi(P, n)| < M \quad (2.1)$$

für alle n gilt.

11. Bekanntlich besitzt das unbestimmte *Lebesguesche* Integral über eine integrierbare Funktion $\varphi(P, n)$ die Eigenschaft der Totalstetigkeit; d. h.: zu jedem $\mu > 0$ gibt es ein $\lambda(\mu) > 0$, so daß für jede abzählbare Menge J sich bis auf die Ränder nicht überdeckender, in R gelegener achsenparalleler Rechtecke, deren Gesamthalt $\leq \lambda$ ist, die Ungleichung besteht:

$$\int_J |\varphi(P, n)| dP < \mu \quad (|J| \leq \lambda)^{11}) .$$

Läßt sich die positive Gre $\lambda(\mu)$ so wählen, daß die letzte Ungleichung für alle $\varphi(P, n)$ $n = 1, 2, \dots$ gilt, so wollen wir $U(\varphi) = \int |\varphi| dP$ als auf R gleichgradig totalstetig bezeichnen.

12. Die Funktionenfolge $\varphi(P, n)$ $n = 1, 2, \dots$ soll über R nullstrebig heißen, wenn für jedes (echte oder unechte) Teilrechteck $R' \subset R$ von R

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R'} \varphi(P, n) dP = 0 \quad (R' \subset R)$$

gilt.

Schließlich wollen wir sagen, der Kern $\varphi(P, n)$ sei in R limitär orthogonal auf F_i ($i = 1, 2$), wenn für jede Funktion $f(P)$, die auf dem Grundrechteck R zur Klasse F_1 bzw. F_2 gehört, die Relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_R f(P) \varphi(P, n) dP = 0 \quad (2.2)$$

besteht. Besitzt $\varphi(P, n)$ diese Eigenschaft in R , so offenbar auch in jedem Teilrechteck $R' \subset R$.

¹¹⁾ Ich schließe mich hier und im folgenden an eine Darstellungsweise von Herrn *Ostrowski* an, wonach hinter eine Relation in Klammern die (manchmal schon im Text angefuhrten) Bedingungen gesetzt werden, unter welchen die betreffende Relation gilt. Ebenso benutzen wir die *Ostrowskische* Bezeichnung $|J|$ für den Inhalt der meßbaren Menge J .

¹²⁾ Wenn in dieser Arbeit von Rechtecken oder Quadraten die Rede ist, so soll es sich stets um achsenparallele Rechtecke bzw. Quadrate handeln.

13. Mit Hilfe der oben eingeführten Begriffe können wir nun zwei bekannte Sätze folgendermaßen formulieren :

Satz I (Fundamentallemma). *Damit ein auf dem Grundrechteck R definierter Kern $\varphi(P, n)$ in R limitär orthogonal auf F_i ($i = 1, 2$) ist, ist notwendig und hinreichend :*

- a) φ ist über R null-strebig¹³).
 - b) Für F_1 : φ ist auf R fast beschränkt¹⁴).
- Für F_2 : $U(\varphi)$ ist auf R gleichgradig totalstetig.

*B.H.Camp*¹⁵) beweist dieses Lemma sowie auch den nächstfolgenden Satz II für den m -dimensionalen Raum ($m > 1$) ganz analog wie *Lebesgue* die entsprechenden Sätze in einer Dimension.

14. Im folgenden möge unser Kern noch von einem Parameterpunkt Q abhängig sein : Es sei also $\Phi(P, Q; n)$ $n = 1, 2, \dots$, wenn nicht eine andere Festsetzung getroffen wird, für jeden inneren Punkt Q des Grundrechtecks R ein Kern im früher festgelegten Sinn.

Mit $R_h(Q)$ bezeichnen wir von jetzt an ein um den Punkt Q als Zentrum gelegtes, achsenparalleles abgeschlossenes Quadrat von der Seitenlänge h , das in R enthalten ist. Der zu $\Phi(P, Q; n)$ gehörige gelochte Kern $\bar{\Phi}$ sei dann für jedes hinreichend kleine $h > 0$ definiert als

$$\bar{\Phi}(P, Q; n; h) \begin{cases} = 0 & P < R_h(Q) \quad Q < (R) \\ = \Phi(P, Q; n) & P < R - R_h(Q) \end{cases}.$$

Strebt für jedes hinreichend kleine $h > 0$ für einen Punkt Q von (R) das Integral

$$\int_{R_h(Q)} \Phi(P, Q; n) dP \quad (2.3)$$

mit $n \rightarrow \infty$ gegen die von h unabhängige Zahl ϱ , so soll Φ ϱ -strebig im Punkte Q heißen.

¹³) Wenn nichts weiter bemerkt wird, gelten die Voraussetzungen jeweils für beide Funktionsklassen F_i ($i = 1, 2$).

¹⁴) Da (2.2) eine infinitäre Eigenschaft zum Ausdruck bringt, würde es im Falle von F_1 genügen, die Ungleichungen (2.1) erst von einem Index n_0 an als erfüllt vorauszusetzen. Die Voraussetzung b) für F_1 ist daher so zu verstehen, daß nach Weglassung endlich vieler Kernglieder und geeigneter Umnummerierung ein Kern erhalten werden kann, der auf R fast beschränkt ist. Und in diesem Sinn ist diese Voraussetzung auch zu verstehen, wenn wir uns später auf sie beziehen.

¹⁵) Vgl. *B.H.Camp* (I), pp. 43—50, 59 und *I.W.Hobson* (II), pp. 424, 445.

15. Endlich wollen wir sagen, es genüge $\Phi(P, Q; n)$ einer N -Ungleichung in Q , wenn zwei positive Konstanten N und h existieren, so daß für alle n

$$\int_{R_h(Q)} |\Phi(P, Q; n)| dP < N$$

ist. — Wenn im folgenden eine Diskussion unter der Voraussetzung dieser Eigenschaft geführt wird, so kommt der Buchstabe N im Laufe der Diskussion in keiner anderen Bedeutung vor. —

16. Mit Hilfe des Fundamentallemmas beweist *Camp* unmittelbar seinen Hauptsatz über die Darstellung einer Funktion in einem Stetigkeitspunkt, den wir jetzt wie folgt formulieren können :

Satz II. *Es sei $\Phi(P, Q; n)$ ein Kern auf dem Grundrechteck R und Q_0 ein beliebiger aber fester Punkt aus (R) .*

Damit für jede Funktion $f(P)$, die auf R der Funktionsklasse F_i ($i=1, 2$) angehört und in Q_0 stetig ist, die Relation

$$f(Q_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_R f(P) \Phi(P, Q_0; n) dP \quad (Q_0 \in (R)) \quad (2.4)$$

gilt, ist notwendig und hinreichend :

a) *Für jedes hinreichend kleine $h > 0$ ist der gelochte Kern $\varphi(P, n) = \overline{\Phi}(P, Q_0; n; h)$ in R limitär orthogonal auf F_1 bzw. F_2 .*

b) *Φ genügt einer N -Ungleichung in Q_0 .*

c) *Φ ist eins-strebig in Q_0 ¹⁶⁾.*

§ 3. Fundamentallemma und Darstellung der Funktion bei gleichmäßiger Konvergenz

17. Unter I^* , II^* wollen wir die folgenden, den Sätzen I bzw. II entsprechenden, unter Berücksichtigung der gleichmäßigen Konvergenz formulierten Sätze anführen :

Satz I^* . *Für jeden Punkt Q einer beliebig vorgegebenen Menge $\mathfrak{M}$ sei der Kern $\Phi(P, Q; n)$ als Funktion von P auf dem Grundrechteck R definiert.*

¹⁶⁾ *B.H.Camp* legt den Sätzen I und II einen beliebigen quadrierbaren Bereich zugrunde. Wenn hier insbesondere achsenparallele Rechtecke gewählt werden, so hängt dies mit der in § 4 zu treffenden Wahl von sogenannten Verschiebungskernen zusammen. Auch ist hier ein einziger, statt wie bei *Camp* ein m -tupel verschiedener, unabhängig voneinander nach unendlich wachsender Parameter n benutzt worden, da die *Campsche* Annahme durch die klassische Abzählbarkeitsumordnung auf die Annahme eines einzigen Parameters zurückgeführt werden kann.

Damit $\Phi(P, Q; n)$ in R limitär orthogonal auf F_i ($i = 1, 2$) ist, gleichmäßig für alle $Q < \mathfrak{M}$, ist notwendig und hinreichend,

a) und b) daß für den Kern $\varphi(P, n) = \Phi(P, Q; n)$ die Voraussetzungen a) und b) des Fundamentallemmas gleichmäßig für alle Punkte $Q < \mathfrak{M}$ erfüllt sind.

Beweis. Die Bedingungen sind notwendig. Für a) ist dies klar, wie man am Beispiel $f(P) \equiv 1$ erkennt. — Wäre b) nicht erfüllt, so gäbe es eine Punktfolge $Q_\nu < \mathfrak{M}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) und eine Indizesfolge $n_\nu < n$ derart, daß für den Kern $\Phi^*(P, \nu) = \Phi(P, Q_\nu; n_\nu)$ jene Bedingung b) von Satz I nicht erfüllt wäre, die sich auf F_1 bzw. F_2 bezieht. Es gäbe nach Satz I eine Funktion $f(P)$ aus der Klasse F_1 bzw. F_2 , für welche

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_R f(P) \Phi^*(P, \nu) dP \neq 0$$

wäre, so daß für diese Funktion die Relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_R f(P) \Phi(P, Q; n) dP = 0$$

nicht gleichmäßig für alle $Q < \mathfrak{M}$ gelten könnte.

Die Bedingungen sind auch hinreichend: Wenn sie nämlich zutreffen, so genügt für jede Folge $Q_\nu < \mathfrak{M}$ und jede Indizesfolge n_ν mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} n_\nu = \infty$

der Kern $\Phi^*(P, \nu) = \Phi(P, Q_\nu; n_\nu)$ den bezüglich F_1 bzw. F_2 gemachten Voraussetzungen des Satzes I. Daher gilt für jede Funktion $f(P)$ aus F_1 bzw. F_2 :

$$\int_R f(P) \Phi^*(P, \nu) dP \rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty).$$

Dies bedeutet, daß Φ in R limitär orthogonal auf F_1 bzw. F_2 ist, gleichmäßig für alle $Q < \mathfrak{M}$.

18. **Satz II*.** Es sei $\Phi(P, Q; n)$ ein Kern auf R , (R) der Variabilitätsbereich von Q und A eine beliebige abgeschlossene in R enthaltene Punktmenge, die keinen Randpunkt von R enthält.

Damit für jede auf A stetige Funktion $f(P)$, die auf R zur Klasse F_i ($i = 1, 2$) gehört, die Relation (2.4) gleichmäßig in A gilt, ist hinreichend, daß

a), b), c) die Voraussetzungen a), b), c) von Satz II gleichmäßig für alle $Q < A$ erfüllt sind.

Beweis. Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sodann möge jedem Punkt Q von A eine (offene, kreisförmige) Umgebung $U(Q) < R$ zugeordnet werden, so daß

$$|f(P) - f(Q)| < \frac{\varepsilon}{6N}, \quad P < U(Q) \quad (3.1)$$

gilt. Es möge $u(Q)$ die zu $U(Q)$ konzentrische Umgebung mit halb so großem Radius bezeichnen. Nach dem *Borelschen* Überdeckungssatz existieren endlich viele $u(Q_\nu)$, die A überdecken. Ihre (offene) Vereinigungsmenge heiße $\mathfrak{A}$.

Es bedeute jetzt δ die Länge des kleinsten Radius, der bei den $u(Q_\nu)$ vorkommt und $\lambda > 0$ den Abstand zwischen den Punktmengen A und $R - \mathfrak{A}$. Schließlich sei $h = \min(\delta, \lambda)$. Dann können wir behaupten, daß

$$|f(P) - f(Q)| < \frac{\varepsilon}{3N}, \quad P < R_h(Q) \quad (3.2)$$

für alle Punkte Q von A gilt ^{16a)}.

In der Tat: Die Größe h ist so klein gewählt, daß alle Punkte von $R_h(Q)$ ($Q < A$) in $\mathfrak{A}$ enthalten sind. Ist jetzt $P < R_h(Q)$ ($Q < A$), so sind die folgenden beiden Fälle möglich: Entweder liegen P und Q in ein und derselben Umgebung $u(Q_\nu)$; oder es gilt $Q < u(Q_\nu)$, $P \nless u(Q_\nu)$. Im letztern Fall ist sicher $P < U(Q_\nu)$. In beiden Fällen folgt aus (3.1)

$$|f(Q) - f(Q_\nu)| < \frac{\varepsilon}{6N} \quad Q < u(Q_\nu) < U(Q_\nu),$$

$$|f(P) - f(Q_\nu)| < \frac{\varepsilon}{6N} \quad P < U(Q_\nu)$$

und damit die Richtigkeit der Behauptung (3.2).

19. Für diese Wahl von h schreiben wir die Identität

$$J_n(f, Q) \equiv \int_R f(P) \Phi(P, Q; n) dP \stackrel{17)}{=} f(Q) \int_{R_h(Q)} \Phi(P, Q; n) dP + \\ + \int_{R_h(Q)} [f(P) - f(Q)] \Phi(P, Q; n) dP + \int_R f(P) \bar{\Phi}(P, Q; n; h) dP. \quad (3.3)$$

^{16a)} Man beachte, daß es sich hier nicht einfach um den klassischen Satz über die gleichmäßige Stetigkeit handelt, da P auch auf gewissen Punkten der Menge $R - A$ variiert.

¹⁷⁾ Die Existenz der Integrale von dieser Gestalt folgt aus dem Satz, daß ein Produkt von zwei in einem beschränkten meßbaren Bereich gegebenen summierbaren Funktionen stets summierbar ist, wenn einer der beiden Faktoren bis auf eine Nullmenge in jenem Bereich absolut gleichmäßig beschränkt ist (vgl. *C. Caratheodory* (I), p. 438). Im Falle der Funktionsklasse F_2 ist diese Voraussetzung bei $J_n(f, Q)$ offenbar erfüllt. Handelt es sich um die Klasse F_1 , so ist $f(P)$ wegen der Stetigkeit in Q für ein hinreichend kleines $h > 0$ auf $R_h(Q)$ endlich, und auf dem Bereich $R - R_h(Q)$ ist nach Voraussetzung a) zufolge des Satzes I* der andere Faktor, $\bar{\Phi}$, bis auf eine Nullmenge absolut beschränkt.

Der mittlere Term der rechten Seite ist absolut $< \frac{\varepsilon}{3}$ für alle n , wie man aus der N -Ungleichung und der Relation (3.2) sofort erkennt.

Wegen der Eins-Strebigkeit von Φ und der gleichmäßigen Beschränktheit von f auf A , kann ein Index n_0 angegeben werden, so daß der erste Term rechts in (3.3) sich höchstens um $\pm \frac{\varepsilon}{3}$ von $f(Q)$ unterscheidet für alle $Q < A$ und alle $n > n_0$. Zuzufolge der limitären Orthogonalität von $\bar{\Phi}$ auf F_1 bzw. F_2 strebt der dritte Term in A gleichmäßig nach 0 und ist daher von einem n'_0 an absolut $< \frac{\varepsilon}{3}$. Daher ergibt sich aus (3.3):

$$|J_n(f, Q) - f(Q)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad (n \geq \text{Max}(n_0, n'_0))$$

für alle $Q < A$. Da ε beliebig klein angenommen werden kann, ist der Satz somit bewiesen.

§ 4. Ein Hilfssatz von Camp

20. Wir führen in diesem Paragraphen einen Hilfssatz (Satz III) an, der sich in späteren Sätzen beim Beweis der Notwendigkeit gewisser Bedingungen immer wieder als das wichtigste Werkzeug erweisen wird.

Satz III. *Ist $\varphi(P, n)$ $n = 1, 2, \dots$ eine auf einem ebenen (nach Peano-Jordan) quadrierbaren Bereich B gegebene Folge integrierbarer Funktionen des Punktes P , und ist die Menge der Zahlen*

$$\int_B |\varphi(P, n)| dP$$

für $n \rightarrow \infty$ nicht beschränkt, so existiert eine auf B stetige Funktion $f(P)$, welche auf dem Rand von B verschwindet, wobei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f(P) \varphi(P, n) dP \neq 0$$

ist.

Dieser Satz, eine Verallgemeinerung eines entsprechenden eindimensionalen *Haar-Lebesgueschen* Satzes¹⁸⁾, wurde von *Camp*¹⁹⁾ aufgestellt und bewiesen, so daß wir auf seinen Beweis nicht eingehen wollen.

¹⁸⁾ Vgl. z.B. *H. Hahn* (I), pp. 593—596.

¹⁹⁾ *B. H. Camp* (I), pp. 49—50.

§ 5. Darstellung der partiellen Ableitung im Falle des totalen Differentials

21. **Satz IV.** Es sei $\Psi(P, Q; n)$ ein Kern auf R und $Q_0(x, y)$ ein beliebiger aber fester Punkt aus (R) .

Damit für jede Funktion $f(P)$, die auf R zu F_i ($i = 1, 2$) gehört und in Q_0 ein totales Differential besitzt, die Relation

$$\left(\frac{\partial f(P)}{\partial \xi} \right)_{P=Q_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_R f(P) \Psi(P, Q_0; n) dP \quad (P = P(\xi, \eta)) \quad (5.1)$$

gilt, ist notwendig und hinreichend:

a) Für jedes hinreichend kleine $h > 0$ ist der gelochte Kern $\varphi(P, n) = \bar{\Psi}(P, Q_0; n; h)$ in R limitär orthogonal auf F_1 bzw. F_2 .

b) Die Funktionenfolge $|PQ_0| \cdot \Psi(P, Q_0; n)$ genügt einer N -Ungleichung in Q_0 .

c) Die Funktionenfolgen $(\eta - y)\Psi(P, Q_0; n)$, $\Psi(P, Q_0; n)$ sind nullstrebend in Q_0 .

d) Die Folge $(\xi - x)\Psi(P, Q_0; n)$ ist einsstrebend in Q_0 .

22. **Beweis.** Unter Berücksichtigung von (1.5) kann für alle Punkte $P(\xi, \eta) < R$

$$f(P) = f(Q_0) + (\xi - x)f'_\xi(Q_0) + (\eta - y)f'_\eta(Q_0) + o(|PQ_0|) \quad (5.2)$$

gesetzt werden, wobei $\frac{o(|PQ_0|)}{|PQ_0|}$ mit $|PQ_0| \rightarrow 0$ nach 0 konvergiert.

Aus (5.2) folgt nun für kleine $h > 0$ und alle n , wenn wir der Kürze halber Ψ_n für $\Psi(P, Q_0; n)$ schreiben:

$$\begin{aligned} J'_n(f, Q_0) &\equiv \int_R f(P) \Psi_n dP = \int_R f(P) \bar{\Psi}(P, Q_0; n; h) dP + f(Q_0) \int_{Rh(Q_0)} \Psi_n dP + \\ &+ f'_\xi(Q_0) \int_{Rh(Q_0)} (\xi - x) \Psi_n dP + f'_\eta(Q_0) \int_{Rh(Q_0)} (\eta - y) \Psi_n dP + \int_{Rh(Q_0)} o(|PQ_0|) \Psi_n dP^{20}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Es streben wegen der Voraussetzung a) der erste Term rechts in (5.3) für $n \rightarrow \infty$ nach 0, der zweite und vierte Term wegen der Voraussetzung c) ebenfalls nach 0, und der dritte wegen Voraussetzung d) nach $f'_\xi(Q_0)$.

²⁰⁾ Für die Klärung der Frage nach der Existenz dieser Integrale konsultiere man die Fußnote 17.

Um zu beweisen, daß das letzte Integral rechts in (5.3) nach 0 strebt, wählen wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Dann läßt sich ein $h > 0$ angeben, so daß im Quadrat $R_h(Q_0) < R$

$$\frac{|o(|PQ_0|)|}{|PQ_0|} < \frac{\varepsilon}{N}, \quad P(\xi, \eta) < R_h(Q_0) \quad (5.4)$$

ist. Es gilt daher wegen Voraussetzung b) für alle n

$$\left| \int_{R_h(Q_0)} o(|PQ_0|) \Psi_n dP \right| < \varepsilon, \quad (5.5)$$

womit die Bedingungen als hinreichend nachgewiesen sind.

23. Die Voraussetzungen sind notwendig: Wäre nämlich a) nicht erfüllt, so existierte eine der Klasse F_1 bzw. F_2 angehörende Funktion $g(P)$ und ein $h > 0$, so daß für ein gewisses Teilrechteck R^* von R

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R^*} g(P) \overline{\Psi}(P, Q_0; n; h) dP \neq 0 \quad (5.6)$$

wäre. — Hieraus folgt, daß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, es habe R^* mit $R_h(Q_0)$ höchstens Randpunkte gemeinsam. — Definieren wir dann $f(P)$ durch die Vorschrift

$$f(P) \begin{cases} = g(P) & P < (R^*) \\ = 0 & P < R - (R^*), \end{cases}$$

so gehört auch f auf R zur Klasse F_1 bzw. F_2 . $f(P)$ hat im Punkt $P = Q_0$ ein totales Differential, und es ist $f'_\xi(Q_0) = 0$, während andererseits aus (5.6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J'_n(f, Q_0) \neq 0$$

folgt. Dies steht im Widerspruch zu (5.1).

24. Für später wollen wir aus diesem letzten Beweis noch folgendes in Erinnerung behalten: Ist Voraussetzung a) nicht erfüllt, so existiert ein $h > 0$ und eine Funktion $f(P)$, die auf R zu F_1 bzw. F_2 gehört und auf $R_h(Q_0)$ identisch 0 ist (kurz: eine in Q_0 gelochte Funktion), für welche (5.1) nicht gilt.

25. Wäre b) nicht erfüllt, so existierte nach Satz III ein $h > 0$ und eine auf $R_h(Q_0)$ stetige Funktion $\omega(P, Q_0)$, für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_h(Q_0)} \omega(P, Q_0) \cdot |PQ_0| \Psi_n dP \neq 0 \quad (5.7)$$

gelten müßte. Da wir den Punkt Q_0 als einen Randpunkt unseres Bereichs auffassen können, kann man gemäß Satz III noch verlangen, daß $\omega(P, Q_0) = 0$ ist für $P = Q_0$. Setzen wir

$$f(P) \left\{ \begin{array}{ll} = |PQ_0| \omega(P, Q_0) & P < R_h(Q_0) \\ = 0 & P < R - R_h(Q_0) \end{array} \right. ,$$

so besitzt $f(P)$ in $P = Q_0$ offenbar ein totales Differential, und es ist $f'_\xi(Q_0) = 0$. Da andererseits wegen (5.7)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J'_n(f, Q_0) \neq 0$$

gilt, stehen wir wieder im Widerspruch mit (5.1).

Die Bedingungen c) und d) erweisen sich als notwendig, wenn man für f insbesondere die Funktionen wählt, die in $R - R_h(Q_0)$ identisch 0 und in $R_h(Q_0)$ gleich $\eta - y$, 1 bzw. $\xi - x$ sind. Damit ist Satz IV bewiesen.

26. Besitzt eine Funktion f in allen Punkten einer Menge $\mathfrak{M}$ ein totales Differential, und sind ihre partiellen Ableitungen f'_ξ, f'_η daselbst gleichmäßig beschränkt, so wollen wir sagen, f besitze gleichmäßig in $\mathfrak{M}$ ein totales Differential, wenn noch die folgende Bedingung erfüllt ist. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß — unter $o(|PQ|)$ das „Restglied“ in (5.2) verstanden — für alle $|PQ| < \delta$ die Ungleichung

$$\frac{|o(|PQ|)|}{|PQ|} < \varepsilon \quad (Q < \mathfrak{M})$$

gleichmäßig für alle $Q < \mathfrak{M}$ gilt. — Ein dem Satz IV entsprechender, die gleichmäßige Konvergenz berücksichtigender Satz läßt sich jetzt wie folgt formulieren.

27. **Satz IV*.** Es sei $\Psi(P, Q; n)$ ein Kern auf R und $\mathfrak{M}$ eine beliebige aber fest gewählte Punktmenge aus irgend einem Rechteck $R' < (R)$.

Damit für jede Funktion, die auf R zu F_i ($i = 1, 2$) gehört und gleichmäßig in $\mathfrak{M}$ ein totales Differential besitzt, die Relation (5.1) gleichmäßig in $\mathfrak{M}$ gilt, ist hinreichend, daß

a) — d) die Voraussetzungen a) — d) von Satz IV gleichmäßig für alle Punkte $Q < \mathfrak{M}$ erfüllt sind.

Der Beweis ergibt sich sofort daraus, daß jetzt sämtliche Grenzübergänge rechts in (5.3) gleichmäßig für alle $Q < \mathfrak{M}$ erfolgen.

§ 6. Charakterisierung der Verschiebungskerne

28. Durch Kombination der Sätze II und IV werden wir in § 10 einen „Differentiationssatz“ aufstellen können, der über die „partielle Differenzierbarkeit“ der Relation (2.4) Aufschluß erteilt. Um möglichst einfache Kriterien zu erhalten, wollen wir annehmen, es habe der Kern die Gestalt

$$\Phi(P, Q; n) = \Phi(\xi - x, \eta - y; n) \quad (P = P(\xi, \eta), Q = Q(x, y)), \quad (6.1)$$

und es sei das Grundrechteck R insbesondere ein Quadrat R_l von der Seitenlänge l .

Wir setzen im folgenden

$$u = \xi - x, \quad v = \eta - y. \quad (6.2)$$

Bezeichnet O den Nullpunkt der uv -Ebene und $Q(x, y)$ einen beliebigen inneren Punkt von R_l , so ist der Definitionsbereich des Kerns

$$\Phi(\xi - x, \eta - y; n) = \Phi(u, v; n)$$

in der uv -Ebene offenbar das Innere $(R_{2l}(O))$ des Quadrates $R_{2l}(O)$. Einen solchen Kern Φ wollen wir einen Verschiebungskern auf $(R_{2l}(O))$ nennen, wenn die folgenden Voraussetzungen zutreffen. Dabei bedeute das Symbol (a, b) hier wie auch später das offene Intervall, dessen Endpunkte a, b ($a < b$) sind.

29. $\Phi(u, v; n)$ sei für alle n und jedes feste $v < (-l, l)$ totalstetig bezüglich u in jedem abgeschlossenen u -Intervall $L' < (-l, l)$ und für jedes feste $u < (-l, l)$ in $(-l, l)$ meßbar bezüglich v . Es seien $\Phi(u, v; n)$ und $\Phi'_u(u, v; n)$ integrabel über jedes Rechteck $R^* < (R_{2l}(O))$ für alle n . Schließlich gelte für jedes $h' > 0$ in jedem abgeschlossenen Teilrechteck R^* von $(R_{2l}(O))$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Phi}(u, v; n; h') = 0 \quad (P(u, v) < R^* < (R_{2l}(O))) \quad (6.3)$$

gleichmäßig für alle Punkte $P(u, v) < R^*$. Hierbei sei $\bar{\Phi} = 0$ für $P(u, v) < R_{h'}(O)$ und $\bar{\Phi} = \Phi$ für $P(u, v) < (R_{2l}(O)) - R_{h'}(O)$.

Wir wollen in Analogie zur früheren Definition für $\bar{\Phi}(u, v; n; h')$ wieder die Benennung „gelochter Kern“ benutzen. — Entsprechend werden wir sagen, $\Phi(u, v; n)$ genüge einer N -Ungleichung im Nullpunkt bzw. sei ρ -strebzig im Nullpunkt, wenn $\Phi(\xi - x, \eta - y; n)$ diese Eigenschaft im Punkt $x = y = 0$ besitzt. —

30. Aus (6.3) läßt sich folgende Eigenschaft der Verschiebungskerne herleiten:

Für ein beliebiges positives $l' < l$ betrachte man das Quadrat $R_{2l'}(O)$. Dann ist wegen (6.3) für jedes feste $h > 0$, jedes $\varepsilon > 0$ und alle $n > n_0(\varepsilon, h)$

$$|\bar{\Phi}(u, v; n; h)| < \varepsilon \quad (P(u, v) < R_{2l'}(O), n > n_0) . \quad (6.4)$$

Bezeichnet jetzt $Q(x, y)$ irgendeinen Punkt im $\xi\eta$ -System, so gilt folglich für alle Punkte $P(\xi, \eta) < R_{2l'}(Q)$

$$|\bar{\Phi}(\xi - x, \eta - y; n; h)| < \varepsilon \quad (P(\xi, \eta) < R_{2l'}(Q), n > n_0) \quad (6.5)$$

und zwar gleichmäßig für alle Punkte Q . Der Schluß von (6.4) auf (6.5) beruht offenbar auf der in (6.1) zum Ausdruck kommenden Eigenschaft des Kerns, die wir im folgenden Verschiebungseigenschaft nennen wollen.

§ 7. Totalstetige Verschiebungskerne

31. Bevor wir uns mit weiteren Eigenschaften der Verschiebungskerne befassen, wollen wir die oben gegebene Charakterisierung dieser Kerne noch etwas genauer analysieren. Es ist unbefriedigend, daß die Existenz der Integrale

$$\int_{R^*} \Phi(u, v; n) du dv, \quad \int_{R^*} \Phi'_u(u, v; n) du dv \quad (R^* < (R_{2l}(O))) \quad (7.1)$$

sich nicht auf einfache Weise aus den übrigen, den Verschiebungskern definierenden Eigenschaften gewinnen läßt und daher vorausgesetzt

wurde. In einem besonderen Satz wird daher jetzt für den Fall von $m=2$ Variablen dem Kern Φ eine etwas schärfere Bedingung auferlegt, aus welcher die Existenz dieser Integrale ohne Schwierigkeit geschlossen werden kann.

32. **Satz.** Sind die Glieder $\Phi(u, v; n)$ $n = 1, 2, \dots$ einer auf $(R_{2l}(O))$ definierten Funktionenfolge als Funktionen der beiden Variablen u, v totalstetig auf jedem Rechteck $R^* < (R_{2l}(O))$, so ist diese Folge unter der Voraussetzung, daß (6.3) gilt, ein Verschiebungskern auf $(R_{2l}(O))$.

Dabei sagen wir, eine Funktion $g(u, v)$ sei auf R^* totalstetig, wenn g für festes u in v und für festes v in u totalstetig ist, und wenn die zugehörige Intervallfunktion

$$\Psi(i) = g(u_2, v_2) - g(u_1, v_2) - g(u_2, v_1) + g(u_1, v_1) ,$$

wo i ein in R^* enthaltenes Rechteck mit den Eckpunkten $P(u_\nu, v_\kappa)$ ($\nu, \kappa = 1, 2$) bedeutet, selbst totalstetig auf R^* ist²¹⁾.

Beim Beweis werden wir uns der folgenden bekannten Tatsache aus der Theorie der reellen Funktionen bedienen, wobei mit dem auch später benutzten Symbol $\langle \alpha, \beta \rangle$ das abgeschlossene Intervall bezeichnet wird, dessen Endpunkte α, β ($\alpha < \beta$) sind:

Ist $f(x)$ eine im Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ integrable Funktion und $F(x)$ ein unbestimmtes Integral

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(x) dx \quad (\alpha \leq x \leq \beta) ,$$

so gilt für die Totalvariation $T(\alpha, \beta)$ von $F(x)$ in $\langle \alpha, \beta \rangle$:

$$T(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx \quad (7.2)$$

33. **Beweis.** Da jede totalstetige Funktion von zwei Variablen stetig ist im gewöhnlichen Sinne²³⁾, existiert das erste Integral (7.1).

²¹⁾ Diese Definition der Totalstetigkeit ist äquivalent mit der in *C. Caratheodory* (I), p. 653, gegebenen, wie man mit Hilfe des dort auf p. 654 formulierten Satzes 3 sofort erkennt.

²²⁾ Vgl. *I. W. Hobson* (I), p. 605.

²³⁾ Vgl. *C. Caratheodory* (I), p. 654.

Φ'_u ist eine meßbare Funktion²⁴⁾. Um die Integrierbarkeit von Φ'_u zu beweisen, genügt es, nachzuweisen, daß das iterierte Integral

$$\int dv \int | \Phi'_u(u, v; n) | du , \quad (7.3)$$

erstreckt über R^* , existiert²⁵⁾. Seien etwa A, B ($A < B$) die u - und C, D ($C < D$) die v -Koordinaten der Eckpunkte von R^* . Dann ist nach (7.2)

$$\int_A^B | \Phi'_u(u, v; n) | du = T_n(v) ,$$

wo $T_n(v)$ die Totalvariation der Funktion Φ im Intervall $\langle A, B \rangle$ für festes v bezeichnet. (7.3) existiert sicher, wenn $T_n(v)$ in $\langle C, D \rangle$ eine stetige Funktion ist. Daß dies tatsächlich der Fall ist, besagt der folgende Hilfssatz, mit dessen Beweis dann auch der obige Satz bewiesen sein wird.

34. Hilfssatz 1. *Ist $g(u, v)$ totalstetig auf dem Rechteck R^* , dessen Ecken A, B als u - und C, D als v -Koordinaten haben mögen, und bezeichnet $T(v)$ die Totalvariation von g für ein festes $v \in \langle C, D \rangle$ auf dem u -Intervall $\langle A, B \rangle$, so ist $T(v)$ im Intervall $\langle C, D \rangle$ stetig.*

Beweis. Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wenn jetzt $\Psi(i)$ die der Funktion g zugeordnete Intervallfunktion bedeutet, kann man ein $\delta(\varepsilon) > 0$ angeben, so daß stets

$$\sum_{\nu} | \Psi(i_{\nu}) | < \frac{\varepsilon}{3} \quad \left(\sum_{\nu} | i_{\nu} | < \delta(\varepsilon) \right) \quad (7.4)$$

gilt, wenn i_{ν} ($\nu = 1, 2, \dots$) eine beliebige Menge von abzählbar vielen, punktfremden, in R^* enthaltenen Rechtecken ist, wobei die Summe ihrer Flächeninhalte $| i_{\nu} |$ kleiner als $\delta(\varepsilon)$ ist.

Sei jetzt v ein beliebiger aber fester Wert aus $\langle C, D \rangle$ und h eine beliebige Größe mit

$$| h | < \frac{\delta(\varepsilon)}{B - A} .$$

Wir setzen $v' = v + h$, sofern $v' \in \langle C, D \rangle$ gilt. Dann ist das Maß des Rechtecks i^* mit den Eckpunkten (A, v) , (B, v) , (B, v') , (A, v') kleiner als δ .

²⁴⁾ Vgl. *C. Caratheodory* (I), p. 642.

²⁵⁾ Vgl. *C. Caratheodory* (I), p. 637.

Nach unseren Voraussetzungen kann man eine Zahlenfolge u_ν finden, für die

$$A = u_0 < u_1 < \dots < u_p = B, \\ T(v) - \frac{\varepsilon}{3} < \sum_{\nu=1}^p |g(u_\nu, v) - g(u_{\nu-1}, v)| < T(v) \quad (7.5)$$

ist. Analog existiert eine Folge u'_ν , für die

$$A = u'_0 < u'_1 < \dots < u'_{p'} = B, \\ T(v') - \frac{\varepsilon}{3} < \sum_{\nu=1}^{p'} |g(u'_\nu, v') - g(u'_{\nu-1}, v')| < T(v') \quad (7.6)$$

ist. Die Ungleichungen (7.5) bleiben bekanntlich bestehen, wenn man noch weitere Teilpunkte, z. B. alle $u'_\nu \neq u_\nu$ einführt. Analog gelten die Ungleichungen (7.6) immer noch, wenn man noch die Teilpunkte $u_\nu \neq u'_\nu$ einführt. Wir können daher annehmen, es sei $u_\nu = u'_\nu$, $\nu = 1, \dots, p$; $p = p'$.

Bezeichnen jetzt C, C' die mittleren Terme der Ungleichungen (7.5) bzw. (7.6), so folgt

$$\Delta \equiv |C - C'| \leq \sum_{\nu=1}^p |g(u_\nu, v) - g(u_{\nu-1}, v) - g(u_\nu, v') + g(u_{\nu-1}, v')|.$$

Da die Inhaltssumme der p Rechtecke mit den Eckpunkten

$$(u_\nu, v), (u_{\nu-1}, v), (u_\nu, v'), (u_{\nu-1}, v')$$

gleich $|i^*|$ ist, folgt wegen (7.4) sofort: $\Delta < \frac{\varepsilon}{3}$. Aus den Ungleichungen (7.5), (7.6) ergibt sich daher

$$|T(v) - T(v')| < \Delta + 2\frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Dies gilt für jedes hinreichend kleine $|v - v'| = |h|$ und bedeutet daher die Stetigkeit von $T(v)$ im Punkte v .

§ 8. Ein Satz über Verschiebkerne

35. Der nächste Satz (Satz V) bildet die Grundlage für eine Vereinigung der Sätze II und IV zu einem Differentiationssatz für Verschiebkerne. Wir stellen den folgenden Hilfssatz voran:

Hilfssatz 2. Es sei $\Phi(u, v; n)$ ein Verschiebungskern auf $(R_{2l}(O))$. Damit $\bar{\Phi}'_u(u, v; n; h)$ für jedes hinreichend kleine $h > 0$ in jedem Rechteck $R^* \subset (R_{2l}(O))$ auf F_i ($i = 1, 2$) limitär orthogonal ist, ist notwendig und hinreichend, daß die auf F_1 bzw. F_2 bezügliche Bedingung b) von Satz I für $\varphi = \bar{\Phi}'_u(u, v; n; h)$ und $R = R^*$ erfüllt ist.

Aus den Eigenschaften des Verschiebungskerns läßt sich nämlich für $\bar{\Phi}'_u$ die Null-Strebigkeit über R^* folgern, so daß sich zusammen mit Voraussetzung Ib) für $\bar{\Phi}'_u$ nach dem Fundamentallemma die limitäre Orthogonalität auf F_1 bzw. F_2 ergibt.

In der Tat: Es seien mit a, b ($a < b$) die u - und mit c, d ($c < d$) die v -Koordinaten der Eckpunkte eines beliebigen Rechtecks $R' \subset R^*$ bezeichnet, das den Nullpunkt nicht enthält. Wegen der Lochung des Kerns ist die Beschränkung auf solche Rechtecke R' erlaubt. Durch Integration nach u erhält man wegen der Totalstetigkeit von Φ in u :

$$\int_{R'} \Phi'_u(u, v; n) du dv = \int_c^d \{\Phi(b, v; n) - \Phi(a, v; n)\} dv^{26)}.$$

Das letzte Integral strebt mit $n \rightarrow \infty$ nach 0, was sich aus (6.3) ergibt, wenn man beachtet, daß die Punkte (b, v) , (a, v) $v \in \langle c, d \rangle$ für hinreichend kleine $h' > 0$ nicht in $R_{h'}(O)$ liegen. Dies bedeutet die Null-Strebigkeit von $\bar{\Phi}'_u$ über R^* .

36. Satz V. Es sei $\Phi(u, v; n)$ ein Verschiebungskern auf $(R_{2l}(O))$, R_l ein beliebiges in einer $\xi\eta$ -Ebene vorgegebenes Quadrat und $Q_0(x, y) \subset (R_l)$ ein beliebiger aber fester Punkt.

Damit auf R_l für $\Phi(\xi - x, \eta - y; n)$ die Voraussetzungen von Satz II und für $-\Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n)$ jene von Satz IV erfüllt sind, ist hinreichend:

a) In jedem Teilrechteck R^* von $(R_{2l}(O))$ und für jedes hinreichend kleine $h > 0$ ist $\bar{\Phi}'_u(u, v; n; h)$ limitär orthogonal auf F_1 bzw. F_2 .

b₁) und b₂) Die Funktionenfolgen $u\Phi'_u(u, v; n)$, $v\Phi'_u(u, v; n)$ genügen je einer N -Ungleichung im Ursprung.

c) $\Phi(u, v; n)$ ist eins-strebig im Ursprung.

Insbesondere sind c) bezüglich Satz II und a), b₁), b₂) bezüglich Satz IV notwendige Bedingungen.

²⁶⁾ Zufolge der Integrabilität von Φ'_u über R' kann das Integral linker Hand durch iterierte Integration berechnet werden (vgl. I. W. Hobson (I), p. 630). Ferner ist die Anwendung des Fundamentalsatzes der Infinitesimalrechnung wegen der Totalstetigkeit von Φ in u erlaubt (vgl. I. W. Hobson (I), pp. 592, 593).

37. Unter Beachtung des Hilfssatzes 2 erhält man offenbar sofort den folgenden

Zusatz zu Satz V. Die Voraussetzung a) in Satz V kann ersetzt werden durch die weniger umfassende:

V. a^o) Für jedes hinreichend kleine $h > 0$ und jedes Rechteck $R^* < (R_{2l}(O))$ gilt

für F_1 : $\bar{\Phi}'_u(u, v; n; h)$ ist auf R^* fast beschränkt.

für F_2 : $\int |\bar{\Phi}'_u(u, v; n; h)| du dv$ ist auf R^* gleichgradig totalstetig.

38. Beweis von Satz V. Wir zeigen zuerst, daß die Voraussetzungen hinreichend sind. Zu diesem Zweck bestimmen wir eine positive GröÙe $l' < l$, so daß

$$R_l < R_{2l'}(Q_0) \quad (8.1)$$

gilt (vgl. Figur).

Wir verifizieren jetzt für Φ die Eigenschaften IIa), b), c):

Unter Beachtung von (8.1) folgt aus (6.5), daß $\bar{\Phi}$ auf R_l die Voraussetzungen des Fundamentallemmas für F_1 bzw. F_2 erfüllt. $\bar{\Phi}$ ist also in R_l limitär orthogonal auf F_1 bzw. F_2 . Dies wird gerade in IIa) gefordert.

IIb) verlangt, daß Φ in Q_0 einer N -Ungleichung genügt, was man durch partielle Integration nach ξ nachweist²⁷⁾. Für jedes hinreichend kleine $h > 0$ ist wegen der Integrierbarkeit von Φ und der Totalstetigkeit von Φ in u :

$$\begin{aligned} \int_{(Q_0)} |\Phi| d\xi d\eta &= \int_{y-h}^{y+h} \left\{ (\xi-x) |\Phi(\xi-x, \eta-y; n)| \right\}_{x-h}^{x+h} d\eta - \int_{R_{2h}(Q_0)} (\xi-x) \frac{\partial |\Phi|}{\partial \xi} d\xi d\eta = \\ &= h \int_{y-h}^{y+h} \left\{ |\Phi(h, \eta-y; n)| + |\Phi(-h, \eta-y; n)| \right\} d\eta - \\ &\quad - \int_{R_{2h}(Q_0)} (\xi-x) \Phi'_u(\xi-x, \eta-y; n) \operatorname{sgn} \Phi d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (8.2)$$

²⁷⁾ Vgl. z. B. C. Caratheodory (I), p. 549, für die Bedingungen, unter denen die Formel der partiellen Integration gilt.

Dabei kann man etwa $\operatorname{sgn} \Phi = 1$ für $\Phi \geq 0$ und $\operatorname{sgn} \Phi = -1$ für $\Phi < 0$ setzen²⁸⁾. Da die Punkte $(h, \eta - y)$, $(-h, \eta - y)$ ($\eta < \langle y - h, y + h \rangle$) für ein $h' < 2h$ nicht in $R_{h'}(O)$ liegen, folgt aus der Meßbarkeit von Φ und aus (6.3), daß in (8.2) das erste Integral rechts mit $n \rightarrow \infty$ nach 0 strebt. Das zweite ist wegen Voraussetzung $b_1)$ absolut gleichmäßig beschränkt. Also trifft II b) zu. — Voraussetzung c) ist äquivalent mit II c).

Wir weisen jetzt IV a), b), c), d) für $-\Phi'_u$ nach.

Setzt man in Voraussetzung a) insbesondere $R^* = R_{2l'}(O)$ ($0 < l' < l$), so ergibt sich, da auch $-\Phi'_u$ die Verschiebungseigenschaft besitzt, unter Beachtung von (8.1) sofort, daß $-\overline{\Phi}'_u$ in R_l limitär orthogonal auf F_1 bzw. F_2 ist. Dies besagt, daß IV a) zutrifft.

39. IV b) ist offenbar äquivalent mit den beiden Voraussetzungen $b_1)$ und $b_2)$. — Für später wollen wir uns noch merken, daß im Beweis von Satz V Voraussetzung $b_2)$ hier ein einziges Mal, und zwar zum Nachweis von IV b) benötigt wird.

40. Wir haben jetzt IV c), d. h. die Null-Strebigkeit der Funktionen $-\Phi'_u$, $-(\eta - y) \Phi'_u$ in Q_0 nachzuweisen. Es soll unter $g(\eta - y)$ nach Belieben eine der Funktionen -1 , $-(\eta - y)$ verstanden werden. Sodann bemerken wir, daß man für kleine $h > 0$ durch Integration nach ξ unter Beachtung der Totalstetigkeit von Φ in u

$$\begin{aligned} & \int_{R_{2h}(Q_0)} g(\eta - y) \Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n) d\xi d\eta = \\ & = \int_{y-h}^{y+h} \left\{ g(\eta - y) [\Phi(h, \eta - y; n) - \Phi(-h, \eta - y; n)] \right\} d\eta \end{aligned}$$

erhält, was wegen (6.3) mit $n \rightarrow \infty$ nach 0 konvergiert. Damit ist IV c) verifiziert.

IV d), d. h. die Eigenschaft der Eins-Strebigkeit von $-(\xi - x) \Phi'_u$ in Q_0 weisen wir durch partielle Integration nach:

$$\begin{aligned} & \int_{R_{2h}(Q_0)} (\xi - x) \Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n) d\xi d\eta = \\ & = h \int_{y-h}^{y+h} \left\{ \Phi(h, \eta - y; n) + \Phi(-h, \eta - y; n) \right\} d\eta - \int_{R_{2h}(Q_0)} \Phi d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (8.3)$$

²⁸⁾ Für $\Phi \geq 0$ ist diese Festsetzung klar. Für alle inneren Punkte der Menge $\mathfrak{M}(\Phi = 0)$ ist $|\Phi|'_u = 0$, so daß man dort z. B. $\operatorname{sgn} \Phi = 1$ setzen kann, da der Integrand ohnehin verschwindet. Wegen der Integrierbarkeit von Φ ist die Menge $\mathfrak{M}(\Phi = 0)$ und deren Rand $\mathfrak{R}$ meßbar, und $\mathfrak{R}$ hat das Maß 0. Die Festsetzung $\operatorname{sgn} \Phi = 1$ für die Nullmenge $\mathfrak{R}$ ist für den Wert des letzten Integrals ohne Einfluß.

Das erste Integral rechts strebt wegen (6.3) mit $n \rightarrow \infty$ nach 0 und das zweite wegen Voraussetzung c) nach 1. Daher ist IVd) erfüllt. — Somit sind die Voraussetzungen als hinreichend erkannt.

41. Voraussetzung c) ist offenbar für die Gültigkeit von IIc) notwendig; ebenso Voraussetzungen $b_1)$ und $b_2)$ für die Gültigkeit von IVb). Was schließlich Voraussetzung a) anbetrifft, so ist ihre Notwendigkeit für die Eigenschaft IVa) folgendermaßen einzusehen.

Zunächst wissen wir, daß eine Funktionenfolge in jedem Teilrechteck eines Rechtecks R^* auf F_1 bzw. F_2 limitär orthogonal ist, wenn sie diese Eigenschaft in R^* besitzt. Bezeichnet daher $R^* < (R_{2l}(O))$ ein Rechteck, in welchem $\overline{\Phi}'_u(u, v; n; h)$ für ein gewisses $h > 0$ auf F_1 bzw. F_2 nicht limitär orthogonal ist, so darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, die Seiten von R^* seien $< l$. Ferner kann man wegen der Lochung des Kerns annehmen, R^* habe mit $R_h(O)$ höchstens Randpunkte gemeinsam. Dann existiert ein Punkt $Q_0(x, y) < (R_l)$ mit der Eigenschaft, daß die Transformation (6.2) das Rechteck R^* der uv -Ebene in ein Rechteck $\mathfrak{R}$ der $\xi\eta$ -Ebene überführt, für welches

$$\mathfrak{R} < R_l, \quad Q_0 \notin \mathfrak{R}$$

gilt. Für diesen Punkt Q_0 kann daher $-\overline{\Phi}'_u(\xi - x, \eta - y; n; h)$ in R_l auf F_1 bzw. F_2 nicht limitär orthogonal sein und also Voraussetzung IVa) nicht erfüllen. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 9. Verallgemeinerung auf gleichmäßige Konvergenz

42. **Satz V*.** *Es sei $\Phi(u, v; n)$ ein Verschiebungskern auf $(R_{2l}(O))$ und A eine beliebige in einem vorgegebenen Quadrat R_l der $\xi\eta$ -Ebene gelegene abgeschlossene Punktmenge, die keine Randpunkte von R_l enthält.*

Dann sind die Voraussetzungen von Satz V hinreichend dafür, daß für $\Phi(\xi - x, \eta - y; n)$ die Voraussetzungen von Satz II und für $-\Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n)$ jene von Satz IV* mit $\mathfrak{M} = A$ und $R = R_l$ erfüllt sind.*

Beweis. Wir greifen auf den Beweis des Satzes V zurück. Das Quadrat $R_{2l'}(Q)$ werde nunmehr so groß gewählt, daß (8.1) für alle Punkte $Q < A$ gilt.

Zunächst weisen wir II* a) für $\overline{\Phi}$ und IV* a) für $-\overline{\Phi}'_u$ in dieser Reihenfolge nach.

Daß $\overline{\Phi}$ in R_l limitär orthogonal auf F_1 bzw. F_2 ist, und zwar gleichmäßig für alle $Q < A$, folgt aus Satz I*, dessen Voraussetzungen wegen (6.5) und (8.1) für $\varphi = \overline{\Phi}$, $R = R_l$ und $\mathfrak{M} = A$ erfüllt sind. Also trifft II* a) zu.

Um die entsprechende Eigenschaft für $-\overline{\Phi}'_u$, also IV* a) nachzuweisen, zeigen wir, daß für $-\overline{\Phi}'_u$ auf R_l die Voraussetzungen a) und b) von Satz I* zutreffen, wobei wieder $\mathfrak{M}$ mit A zu identifizieren ist.

Die Richtigkeit der auf I* b) bezüglichen Behauptung ergibt sich sofort etwa unter Benutzung von V a°) aus der Verschiebungseigenschaft von Φ'_u . Wir haben also noch I* a), d. h. für $-\overline{\Phi}'_u(\xi - x, \eta - y; n; h)$ die Eigenschaft der gleichmäßigen Null-Strebigkeit über R_l nachzuweisen.

Es bedeute $Q(x, y)$ einen beliebigen Punkt aus A und $\mathfrak{R}$ ein beliebiges für ein festes $h > 0$ in $R_l - (R_h(Q))$ gelegenes Rechteck, dessen Ecken a, b als ξ - und c, d als η -Koordinaten haben mögen. Dann ist

$$\int_{\mathfrak{R}} \Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n) d\xi d\eta = \int_c^d \{ \Phi(b - x, \eta - y; n) - \Phi(a - x, \eta - y; n) \} d\eta \quad (9.1)$$

Für die im Integranden rechts auftretenden Argumente gilt wegen (6.3):

$$|\Phi(b - x, \eta - y; n)| < \varepsilon, \quad |\Phi(a - x, \eta - y; n)| < \varepsilon \quad (n > n_0)$$

und zwar gleichmäßig für alle Rechtecke $\mathfrak{R}$ und alle Punkte $Q < A$. Ist jetzt R' ein beliebiges Teilrechteck von R_l , so läßt es sich stets aus höchstens 8 Rechtecken vom Typus $\mathfrak{R}$ und eventuell $R_h(Q)$ zusammensetzen. Daher folgt aus (9.1), daß das Integral

$$\int_{R'} \overline{\Phi}'_u(\xi - x, \eta - y; n; h) d\xi d\eta$$

mit $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig nach 0 strebt für alle $Q < A$. Dies bedeutet, daß IV* a) erfüllt ist.

43. Was schließlich die übrigen Voraussetzungen, also II* b), II* c), IV* b), IV* c), IV* d) anbetrifft, so ist wieder wegen der Verschiebungseigenschaft der betreffenden Kerne sofort klar, daß sie erfüllt sind. Wir zeigen dies ausführlicher etwa am Beispiel von IV* b). Für einen beliebigen Punkt $Q_0(x, y) < (R_l)$ ist wegen der Gültigkeit des Satzes V die Eigenschaft IV b) erfüllt, d. h. es ist

$$\int_{R_h(Q_0)} \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} |\Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n)| d\xi d\eta < N.$$

Da der Integrand aber eine reine „Verschiebungsfunktion“ ist, hängt offenbar N nicht von Q_0 ab. Damit ist der Satz bewiesen.

44. Für später wollen wir noch folgendes anmerken: Alle Voraussetzungen von Satz II* und — bis auf IV* b) — alle Voraussetzungen von Satz IV* lassen sich für Φ bzw. $-\Phi'_u$ aus den Voraussetzungen von Satz V nachweisen, aber ohne Benutzung von Vb_2). Dies ergibt sich sofort unter Beachtung der Bemerkung, die in Nummer 39 bezüglich Vb_2) gemacht wurde.

§ 10. Differentiationssatz im Falle des totalen Differentials

45. Unmittelbare Folgerungen aus den Sätzen V, V* und dem Zusatz sind jetzt die folgenden Differentiationssätze:

Satz VI. *Es sei $\Phi(u, v; n)$ ein Verschiebungskern auf $(R_{2l}(O))$ und $Q_0(x, y)$ ein beliebiger aber fester Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates R_l der $\xi\eta$ -Ebene.*

Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_l zu F_i ($i = 1, 2$) gehört und in Q_0 ein totales Differential²⁹⁾ hat, die Relationen

$$f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_l} f(\xi, \eta) \Phi(\xi - x, \eta - y; n) d\xi d\eta, \quad (10.1)$$

$$f'_x(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_l} f(\xi, \eta) \frac{\partial \Phi(\xi - x, \eta - y; n)}{\partial x} d\xi d\eta \quad (10.2)$$

gelten, ist notwendig und hinreichend, daß die Voraussetzungen Va) (oder a°)) b_1), b_2), c) erfüllt sind.

Satz VI*. *Es sei $\Phi(u, v; n)$ ein Verschiebungskern auf $(R_{2l}(O))$ und A eine beliebige in einem vorgegebenen Quadrat R_l der $\xi\eta$ -Ebene gelegene abgeschlossene Punktmenge, die keine Randpunkte von R_l enthält.*

Dann sind die Voraussetzungen von Satz V hinreichend dafür, daß die Relationen (10.1), (10.2) gleichmäßig in A gelten für alle Funktionen, die auf R_l zu F_i ($i = 1, 2$) gehören und gleichmäßig in A ein totales Differential haben.

§ 11. Differentiationssatz im Falle der H -Ableitung

46. Der nächste Satz illustriert die in der Einleitung gemachte Bemerkung, daß bei Differentiationssätzen mit Auszeichnung einer Variablen die Annahme eines totalen Differentials für $f(P)$ dem Wesen dieser Asymmetrie nicht genügend Rechnung trägt. Der folgende Diffe-

²⁹⁾ Die Stetigkeit von f in Q_0 braucht nicht vorausgesetzt zu werden, da sie aus der Eigenschaft des totalen Differentials folgt.

rentiationssatz im Falle einer H -Ableitung gilt nämlich unter geringeren Annahmen über den Kern als im Satz VI, obwohl die Existenz einer H -Ableitung in einem Stetigkeitspunkt für die betreffende Funktion keineswegs die Existenz eines totalen Differentials nach sich zieht, was beispielsweise die Funktion $f(\xi, \eta) \equiv |\eta|$ zeigt, welche im Nullpunkt eine H -Ableitung nach ξ , nicht aber ein totales Differential besitzt.

Daß umgekehrt die Existenz eines totalen Differentials im allgemeinen auch nicht die H -Differenzierbarkeit zur Folge hat, ergibt sich daraus, daß wir im zweiten Teil dieser Beiträge einen Kern angeben werden, welcher die Voraussetzungen von Satz VII, nicht aber jene von Satz VI erfüllt.

47. **Satz VII.** *Es sei $\Phi(u, v; n)$ ein Verschiebungskern auf $(R_{2l}(O))$ und $Q_0(x, y)$ ein beliebiger aber fester Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrats R_l der $\xi\eta$ -Ebene.*

Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_l zu F_i ($i = 1, 2$) gehört und in Q_0 stetig³⁰⁾ und H -differenzierbar nach ξ ist, die Relationen (10.1), (10.2) gelten, ist notwendig und hinreichend, daß Va (oder a°), b_1), c) erfüllt sind.

Beweis. Daß (10.1) zutrifft ist klar, da die Voraussetzungen II a), b), c), wie sich aus der Bemerkung in Nummer 39 ergibt, sich aus Va), b_1), c) folgern lassen. — Wir zeigen jetzt, daß diese Bedingungen für das Erfülltsein von (10.2) hinreichen.

Aus (1.6) und (1.8), den Relationen zur Definition der H -Ableitung nach der ersten Variablen, erhält man für f in R_l die Darstellung

$$f(\xi, \eta) = f(x, \eta) + (\xi - x) f'_\xi(x, \eta) + (\xi - x) \varepsilon(\xi, \eta; x, y) \quad (P(\xi, \eta) < R_l), \quad (11.1)$$

wo $\varepsilon(\xi, \eta; x, y) \rightarrow 0$ ($P(\xi, \eta) \rightarrow Q_0(x, y)$) gilt. Schreiben wir der Kürze halber Φ'_u anstatt $\Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n)$, so gilt identisch für jedes hinreichend kleine $h > 0$

$$\begin{aligned} -J_n(f, Q_0) &\equiv \int_{R_l} f(\xi, \eta) \Phi'_u d\xi d\eta = \int_{R_l} f(\xi, \eta) \overline{\Phi}'_u(\xi - x, \eta - y; n; 2h) d\xi d\eta + \\ &+ \int_{R_{2h}(Q_0)} f(x, \eta) \Phi'_u d\xi d\eta + f'_\xi(x, y) \int_{R_{2h}(Q_0)} (\xi - x) \Phi'_u d\xi d\eta + \int_{R_{2h}(Q_0)} (\xi - x) \Phi'_u \varepsilon d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (11.2)$$

³⁰⁾ Es würde genügen, an Stelle der Stetigkeit von f in Q_0 bloß die gleichmäßige Beschränktheit von f in $R_{h'}(Q_0)$ für ein beliebiges $h' > 0$ vorauszusetzen, sofern die Aussage des Satzes nur auf die eine Relation (10.2) beschränkt wird. Dies wird sich im Beweis bei der Diskussion von (11.3) ergeben.

In Nummer 39 wurde bereits darauf hingewiesen, daß für den Kern $\Psi = -\Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n)$ die Eigenschaften IV a) und d) beweisbar sind aus Va), b₁), c). Aus IV a) folgt jetzt, daß das erste Integral rechts in (11.2) nach 0 und aus IV d), daß das dritte nach -1 strebt.

Wegen Voraussetzung V b₁) kann das vierte Integral mit h absolut beliebig klein gemacht werden. Beim zweiten Integral führen wir die Integration nach ξ aus und erhalten, da $f(x, \eta)$ von ξ unabhängig ist:

$$\int_{R_{2h}(Q_0)} f(x, \eta) \Phi'_u d\xi d\eta = \int_{y-h}^{y+h} f(x, \eta) \{ \Phi(h, \eta - y; n) - \Phi(-h, \eta - y; n) \} d\eta. \quad (11.3)$$

Zufolge (6.3) und der gleichmäßigen Beschränktheit von f in $R_{2h}(Q_0)$ strebt der letzte Integrand mit wachsendem n für alle in Frage kommenden Argumente gleichmäßig nach 0. Daher strebt auch das Integral nach 0. Die Voraussetzungen sind also hinreichend.

48. Die Voraussetzungen Va), b₁), c) sind notwendig: Wäre Va) nicht erfüllt, so könnte IV a) nach Satz V nicht zutreffen. Zufolge der in Nummer 24 bezüglich IV a) gemachten Bemerkung gäbe es dann eine in Q_0 gelochte Funktion aus F_1 bzw. F_2 , für welche (10.2) nicht gelten könnte. Diese Funktion wäre offenbar in Q_0 stetig und H -differenzierbar nach ξ , was zu einem Widerspruch führt.

Wäre V b₁) nicht erfüllt, so existierte nach Satz III eine auf $R_h(O)$ stetige Funktion $g(u, v)$, die im Nullpunkt verschwände und für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_h(O)} g(u, v) u \Phi'_u(u, v; n) du dv \neq 0 \quad (11.4)$$

wäre. Wählt man jetzt insbesondere eine Funktion $f(u, v)$ von der Gestalt

$$f(u, v) \left\{ \begin{array}{ll} = u g(u, v) & P(u, v) < R_h(O) \\ = 0 & P(u, v) \nless R_h(O) \end{array} \right.,$$

so besitzt diese Funktion im Nullpunkt eine H -Ableitung nach u , und es ist

$$\left(\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \right)_{\substack{u=0 \\ v=0}} = 0. \quad (11.5)$$

Aus (11.4) folgt für die Funktion $F(\xi, \eta) = f(\xi - x, \eta - y)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} - \int_{R_l} F(\xi, \eta) \Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n) d\xi d\eta \neq 0,$$

und wegen (11.5) kann die Relation (10.2) für $F(\xi, \eta)$ nicht gelten, womit wir einen Widerspruch erhalten.

Die Notwendigkeit von V c) für die Gültigkeit von (10.1), ist auf Grund des Satzes V klar. Damit ist der Satz bewiesen. —

49. Gilt für $f(\xi, \eta)$ in jedem Punkt $Q(x, y)$ einer Menge $\mathfrak{M}$ die Darstellung von der Gestalt (11.1), wobei $\varepsilon(\xi, \eta; x, y)$ in $\mathfrak{M}$ gleichmäßig nach 0 strebt für $P(\xi, \eta) \rightarrow Q(x, y)$, und ist $f'_\xi(Q)$ gleichmäßig beschränkt auf $\mathfrak{M}$, so sagen wir, f besitze gleichmäßig in $\mathfrak{M}$ eine H -Ableitung nach ξ .

50. Ein VII entsprechender Satz unter Berücksichtigung der gleichmäßigen Konvergenz lautet sodann:

Satz VII*. *Es sei $\Phi(u, v; n)$ ein Verschiebungskern auf $(R_{2l}(O))$, R_l ein vorgegebenes Quadrat der $\xi\eta$ -Ebene und $A < (R)$ eine beliebige abgeschlossene Punktmenge.*

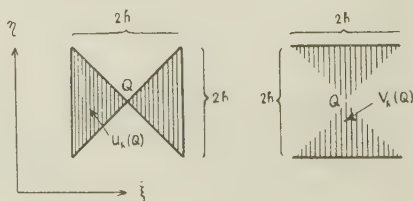
Dann sind die Voraussetzungen von Satz VII hinreichend dafür, daß die Relationen (10.1), (10.2) gleichmäßig in A gelten für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_l zu F_i ($i = 1, 2$) gehört, auf A stetig ist und gleichmäßig in A eine H -Ableitung nach ξ besitzt.

Beweis. Auf Grund der am Ende des Beweises zu Satz V* in Nummer 44 gemachten Bemerkung ist zunächst klar, daß die bezüglich (10.1) aufgestellte Behauptung wahr ist; ferner, daß die Voraussetzungen IV*a) und d) für $\Psi = -\Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n)$ zutreffen und daß daher rechts in (11.2) der erste Term für $n \rightarrow \infty$ nach 0 und der dritte nach $-f'_\xi(x, y)$ strebt, beides gleichmäßig für alle $Q < A$.

Daß der vierte Term rechts in (11.2) absolut beliebig klein gemacht werden kann, gleichmäßig für alle $Q < A$, folgt wegen der Verschiebungseigenschaft aus V b₁), und dasselbe folgern wir für das zweite Integral aus der Betrachtung von (11.3). Somit ergibt sich die Behauptung aus (11.2).

§ 12. Differentiationssatz im Falle der O -Ableitung

51. Bei der Formulierung des nächsten Satzes werden wir es mit „doppeldreieckigen“ Bereichen zu tun haben, die wir zur Veranschaulichung in zwei Figuren schraffiert wiedergeben wollen:



Es sei nämlich für einen festen Punkt $Q(x, y)$ der $\xi\eta$ -Ebene und ein beliebiges $h > 0$ mit $U_h(Q)$ jener Bereich bezeichnet, für dessen Punkte $|\xi - x|, |\eta - y| \leq h$; $|\eta - y| \leq |\xi - x|$ ist. $V_h(Q)$ bezeichne den Bereich $R_{2h}(Q) - U_h(Q)$, also hier im Falle von zwei Variablen den Bereich, für dessen Punkte $|\xi - x|, |\eta - y| \leq h$; $|\eta - y| > |\xi - x|$ ist.

Sodann wollen wir sagen, die Funktionenfolge $\Phi(u, v; n)$ genüge im Nullpunkt O einer U -Ungleichung oder einer V -Ungleichung, wenn eine Konstante U bzw. V und ein $h > 0$ existiert, so daß für alle n

$$\int_{U_h(O)} |\Phi(u, v; n)| du dv < U \quad \text{bzw.} \quad \int_{V_h(O)} |\Phi(u, v; n)| du dv < V$$

gilt.

52. **Satz VIII.** *Es sei $\Phi(u, v; n)$ ein Verschiebungskern auf $(R_{2l}(O))$ und $Q_0(x, y)$ ein beliebiger aber fester Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrats R_l der $\xi\eta$ -Ebene.*

Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_l zu F_i ($i = 1, 2$) gehört und in Q_0 stetig und O -differenzierbar nach ξ ³¹⁾ ist, die Relationen (10.1), (10.2) gelten, ist notwendig und hinreichend:

- a) Voraussetzung Va (oder a°) ist erfüllt.
- b) Die Folge $u\Phi'_u(u, v; n)$ genügt im Ursprung einer U -Ungleichung.
- c) $\Phi(u, v; n)$ ist eins-trebig im Ursprung.
- d) $\Phi'_u(u, v; n)$ genügt im Ursprung einer V -Ungleichung.

53. **Beweis.** Die Voraussetzungen sind hinreichend: Für die Gültigkeit von (10.1) folgt dies analog wie in Satz VII, da mit obigen Voraussetzungen für den Kern auch jene von Satz VII erfüllt sind.

Um (10.2) nachzuweisen, setzen wir für f in R_l , gemäß den Relationen (1.6), (1.7) für die Definition der O -Differenzierbarkeit nach der ersten Variablen:

$$f(\xi, \eta) = f(x, \eta) + (\xi - x) f'_\xi(x, \eta) + (\xi - x) \varepsilon(\xi, \eta; x, y), \quad (12.1)$$

wobei $\varepsilon \rightarrow 0$ ($P(\xi, \eta) \rightarrow Q_0(x, y)$, $|\eta - y| \leq |\xi - x|$) gilt.

Es ist, wenn wiederum Φ'_u anstatt $\Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n)$ geschrieben wird, für jedes hinreichend kleine $h > 0$ identisch

³¹⁾ Es hätte wenig Sinn, f in Q_0 nach beiden Variablen O -differenzierbar vorauszusetzen. Die letztere Annahme ist nämlich notwendig und hinreichend dafür, daß f in Q_0 ein totales Differential besitzt (vgl. *A. Ostrowski* (II), p. 223), und mit diesem Fall haben wir uns bereits in Satz VI befaßt.

$$\begin{aligned}
- J'_n(f, Q_0) &\equiv \int_{R_l} f(\xi, \eta) \Phi'_u d\xi d\eta = \int_{R_l} f(\xi, \eta) \overline{\Phi}'_u(\xi - x, \eta - y; n; 2h) d\xi d\eta + \\
&+ \int_{R_{2h}(Q_0)} f(x, \eta) \Phi'_u d\xi d\eta + f'_\xi(x, y) \int_{R_{2h}(Q_0)} (\xi - x) \Phi'_u d\xi d\eta + \int_{R_{2h}(Q_0)} (\xi - x) \Phi'_u \varepsilon d\xi d\eta .
\end{aligned} \tag{12.2}$$

Das letzte Integral auf der rechten Seite zerlegen wir, indem wir den Integrationsbereich $R_{2h}(Q_0)$ in die beiden Stücke $U_h(Q_0)$, $V_h(Q_0)$ aufspalten. Gleichzeitig legen wir die Größe h folgendermaßen fest: Für ein beliebiges $\delta > 0$ bestimmen wir $h' > 0$, so daß

$$|\varepsilon(\xi, \eta; x, y)| < \delta \quad (P(\xi, \eta) < U_{h'}(Q_0)) \tag{12.3}$$

ist. — Da $(\xi - x)\varepsilon$ nach der Definitionsformel (12.1) im Punkt $P = Q_0$ stetig ist und verschwindet, kann zu jedem hinreichend kleinen $\delta^* > 0$ eine Größe $h^* > 0$ angegeben werden, so daß

$$|(\xi - x)\varepsilon(\xi, \eta; x, y)| < \delta^* \quad (P(\xi, \eta) < V_{h^*}(Q_0)) \tag{12.4}$$

ist. Jetzt setzen wir $h \leq \min(h', h^*)$. Für solche h gilt

$$\left| \int_{R_{2h}(Q_0)} (\xi - x) \Phi'_u \varepsilon d\xi d\eta \right| \leq \delta \int_{U_h(Q_0)} |(\xi - x) \Phi'_u| d\xi d\eta + \delta^* \int_{V_h(Q_0)} |\Phi'_u| d\xi d\eta .
\end{aligned} \tag{12.5}$$

Zufolge der Voraussetzungen b) und d) kann die rechte und also auch die linke Seite dieser Ungleichung für geeignete δ, δ^* absolut beliebig klein gemacht werden.

Wie bereits bemerkt wurde, sind mit den Voraussetzungen von Satz VIII auch Va), b₁), c) erfüllt. Daher ergibt sich, analog wie bei (11,2), daß mit $n \rightarrow \infty$ das erste Integral rechts in (12.2) nach 0 und das dritte nach -1 strebt. Daß das zweite Integral mit $n \rightarrow \infty$ nach 0 strebt, wurde bereits in Satz VII im Anschluß an (11.3) bewiesen, da hierzu von f bloß die gleichmäßige Beschränktheit in $R_{h'}(Q_0)$ für ein hinreichend kleines $h' > 0$ benötigt wurde. — Es unterscheidet sich also $J'_n(f, Q_0)$ von $f'_\xi(x, y)$ um beliebig wenig; die Bedingungen sind daher hinreichend.

54. Die Voraussetzungen sind notwendig: Da jede H -Ableitung auch eine O -Ableitung ist, ergibt sich die Notwendigkeit der Voraussetzungen a) und c) aus der Notwendigkeit dieser Voraussetzungen für Satz VII.

Wäre b) nicht erfüllt, so existierte nach Satz III eine Funktion $g(u, v)$, die auf $U_h(O)$ stetig wäre, auf dem Rand von $U_h(O)$ verschwände und für die sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U_h(O)} g(u, v) u \Phi'_u(u, v; n) du dv \neq 0 \quad (12.6)$$

ergäbe. Dann definiere man eine Funktion $f(u, v)$ von der Gestalt

$$f(u, v) \begin{cases} = u g(u, v) & P < U_h(O) \\ = 0 & P \nless U_h(O) \end{cases}.$$

$f(u, v)$ ist im Nullpunkt stetig, besitzt dort eine O -Ableitung nach u , weil

$$\lim_{|u| \geq |v|, u \rightarrow 0} \frac{f(u, v) - f(0, v)}{u} = \lim_{|u| \geq |v|, u \rightarrow 0} \frac{u g(u, v) - 0}{u} = 0$$

existiert, und es ist daher

$$\left(\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \right)_{\substack{u=0 \\ v=0}} = 0. \quad (12.7)$$

Aus (12.6) folgt aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} - \int_{R_l} f(\xi - x, \eta - y) \Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n) d\xi d\eta \neq 0,$$

was wegen (12.7) einen Widerspruch zu (10.2) bedeutet. Also ist b) notwendig.

Um schließlich die Notwendigkeit von d) einzusehen, nehmen wir an, d) sei nicht erfüllt. Wieder nach Satz III existiert dann eine auf $V_h(O)$ und dem Rand $\Re$ von $V_h(O)$ stetige, auf $\Re$ und auf der v -Achse verschwindende Funktion $g(u, v)$, für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{V_h(O)} g(u, v) \Phi'_u(u, v; n) du dv \neq 0 \quad (12.8)$$

ist. Wir definieren eine Funktion f zu

$$f(u, v) \begin{cases} = g(u, v) & P(u, v) < V_h(O) \\ = 0 & P(u, v) \nless V_h(O) \end{cases}.$$

f ist im Nullpunkt stetig und hat dort eine O -Ableitung nach u , weil

$$\lim_{|u| \geq |v|, u \rightarrow 0} \frac{f(u, v) - f(0, v)}{u} = 0 = f'_u(0, 0)$$

gilt. Aus (12.8) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} - \int_{R_l} f(\xi - x, \eta - y) \Phi'_u(\xi - x, \eta - y; n) d\xi d\eta \neq 0,$$

und dies widerspricht der Relation (10.2). — Damit ist der Satz bewiesen. —

55. Es sei noch besonders hervorgehoben, daß die soeben unter der Voraussetzung des Nichterfülltseins von VIII d) konstruierte Funktion $f(\xi - x, \eta - y)$, für welche (10.2) nicht gilt, auf dem ganzen Quadrat R_l stetig ist. —

56. Besitzt die Funktion $f(\xi, \eta)$ in allen Punkten einer Menge $\mathfrak{M}$ eine O -Ableitung nach ξ , wobei in der Darstellung (12.1) die Funktion $\varepsilon(\xi, \eta; x, y)$ gleichmäßig für alle $Q(x, y) < \mathfrak{M}$ mit $P(\xi, \eta) \rightarrow Q$, $P < U_h(Q)$ nach 0 strebt, und ist $f'_\xi(x, y)$ auf $\mathfrak{M}$ gleichmäßig beschränkt, so sagen wir, f habe gleichmäßig in $\mathfrak{M}$ eine O -Ableitung nach ξ .

57. Ist jetzt $f(\xi, \eta)$ stetig und in diesem Sinne gleichmäßig O -differenzierbar nach ξ in einer abgeschlossenen Punktmenge $A < (R_l)$, so erkennen wir, daß die Limites der vier Integrale rechter Hand in (12.2) gleichmäßig für alle $Q < A$ existieren. Für die ersten drei Integrale ergibt sich dies nämlich analog wie bei den entsprechenden Integralen im Beweis zu Satz VII*. Wegen der gleichmäßigen O -Differenzierbarkeit von f in A kann (12.3), und wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f und der gleichmäßigen Beschränktheit von f'_ξ kann (12.4) gleichmäßig für alle $Q < A$ erfüllt werden, so daß auch das vierte Integral rechts in (12.2) absolut beliebig klein ausfällt, gleichmäßig für alle $Q < A$. Wir erhalten also den Satz:

Satz VIII*. *Es sei $\Phi(u, v; n)$ ein Verschiebungskern auf $(R_{2l}(O))$, R_l ein vorgegebenes Quadrat der $\xi\eta$ -Ebene und $A < (R_l)$ eine beliebige abgeschlossene Punktmenge.*

Dann sind die Voraussetzungen von Satz VIII hinreichend dafür, daß die Relationen (10.1), (10.2) gleichmäßig in A gelten für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_l zu F_i ($i = 1, 2$) gehört, auf A stetig ist und gleichmäßig in A eine O -Ableitung nach ξ besitzt.

§ 13. Vertauschbarkeitskriterien

58. Zum Abschluß unserer allgemeinen Theorie wollen wir noch eine Frage erörtern, die im Hinblick auf Anwendungen für alle hier aufgestellten Differentiationssätze von Bedeutung sein kann. Wann sind in Relation (10.2) Integration und Differentiation vertauschbar? Hinreichende Bedingungen dafür geben die beiden folgenden Kriterien:

Kriterium I. Ist $\Phi(u, v; n)$ ein Verschiebungskern auf einem Quadrat $(R_{2l}(O))$ und $f(\xi, \eta)$ eine beliebige Funktion, die auf einem Quadrat R_l zu F_1 gehört, so gilt für jeden Punkt $Q_0(x, y) < (R_l)$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x} \int_{R_l} f(\xi, \eta) \Phi(\xi - x, \eta - y; n) d\xi d\eta = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_l} f(\xi, \eta) \frac{\partial \Phi(\xi - x, \eta - y; n)}{\partial x} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (13.1)$$

wenn die Integrale linker Hand für alle Punkte Q aus einer Umgebung von Q_0 existieren und wenn zu jedem Rechteck $R' < (R_{2l}(O))$ und zu jedem Index n eine Konstante C_n existiert, so daß fast überall auf R'

$$|\Phi'_u(u, v; n)| < C_n \quad (n = 1, 2, \dots; P(u, v) < R') \quad (13.2)$$

gilt. — Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich offenbar aus dem folgenden Hilfssatz:

59. **Hilfssatz 3.** $f(\xi, \eta)$ sei eine beliebige über R_l integrable Funktion und $\varphi(u, v)$ eine meßbare Funktion, die für jedes feste v totalstetig ist in u auf jedem Rechteck $R' < (R_{2l}(O))$ der uv -Ebene.

Existiert dann zu jedem R' eine Konstante C' , so daß fast überall auf R'

$$|\varphi'_u(u, v)| < C' \quad (13.3)$$

gilt, dann ist für jeden beliebigen aber festen Punkt $Q_0(x, y) < (R_l)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{R_l} f(\xi, \eta) \varphi(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta = \int_{R_l} f(\xi, \eta) \varphi'_x(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta, \quad (13.4)$$

sofern das Integral linker Hand etwa für alle Punkte Q aus einer Umgebung von Q_0 existiert.

60. Beweis. Für eine beliebige Zahlenfolge $x_\nu \rightarrow x$ ($\nu \rightarrow \infty$) betrachten wir die von einem ν_0 an sicher existierende Folge der Integrale

$$A_\nu = \int_{R_l} f(\xi, \eta) \beta_\nu(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (\nu \geq \nu_0), \quad (13.5)$$

wobei

$$\beta_\nu(\xi, \eta) = \frac{\varphi(\xi - x_\nu, \eta - y) - \varphi(\xi - x, \eta - y)}{x_\nu - x} \quad (13.6)$$

gesetzt ist. Wegen der Totalstetigkeit von φ in u erhält man für alle Punkte $P(\xi, \eta) < R_l$:

$$\varphi(\xi - x_\nu, \eta - y) - \varphi(\xi - x, \eta - y) = \int_{\xi-x}^{\xi-x_\nu} \varphi'_u(u, \eta - y) du. \quad (13.7)$$

Aus (13.3) folgt, daß für alle ξ und fast alle η , welche als Argumente von $\varphi'_u(\xi - x, \eta - y)$ in Betracht kommen:

$$\left| \int_{\xi-x}^{\xi-x_\nu} \varphi'_u(u, \eta - y) du \right| < \left| \int_{\xi-x}^{\xi-x_\nu} C' du \right| = C' |x_\nu - x| \quad (32)$$

ist. Daher ergibt sich aus (13.7) für fast alle Punkte $P(\xi, \eta) < R_l$

$$|\beta_\nu(\xi, \eta)| < C' \quad (\nu \geq \nu_0),$$

und folglich existiert eine über R' integrable Funktion $\chi(\xi, \eta)$, so daß für die integrierbaren Funktionen $f \cdot \beta_\nu$ fast überall auf R_l

$$|f(\xi, \eta) \beta_\nu(\xi, \eta)| < \chi(\xi, \eta) \quad (\nu \geq \nu_0) \quad (13.8)$$

gilt. Unter Beachtung dieser Ungleichungen erhält man zufolge des klassischen *Lebesgueschen* Konvergenzsatzes³³⁾

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} A_\nu = \int_{R_l} f(\xi, \eta) \lim_{\nu \rightarrow \infty} \beta_\nu(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

³²⁾ Dabei wird von der folgenden, auf dem Satze von *Fubini* beruhenden Tatsache Gebrauch gemacht: Ist R' ein achsenparalleles Rechteck bezüglich eines uv -Koordinatensystems und M eine in R' enthaltene (zweidimensionale) Nullmenge, dann existiert eine (lineare) Nullmenge $\mathfrak{N}$ von v -Werten, so daß jede R' schneidende Gerade $v = \text{const.}$, $v \notin \mathfrak{N}$ die Menge M höchstens in einer (linearen) Nullmenge trifft. (Vgl. *C. Caratheodory* (I), p. 627, Satz 2.)

³³⁾ Vgl. *C. Caratheodory* (I), p. 444.

und da dies für jede Folge $x_\nu \rightarrow x$ gilt, ergibt sich hieraus unsere Behauptung.

61. **Kriterium II.** Ist $\Phi(u, v; n)$ ein Verschiebungskern auf einem Quadrat $(R_{2l}(O))$ und $f(\xi, \eta)$ eine beliebige Funktion, die auf einem Quadrat R_1 zu F_2 gehört, so gilt für jeden Punkt $Q_0(x, y) \prec (R_1)$ die Relation (13.1), wenn zu jedem Rechteck $R' \prec (R_{2l}(O))$ und zu jedem Index n zwei Konstanten $p_n \prec (0, 1)$ und C_n existieren, so daß fast überall auf R'

$$|\Phi'_u(u, v; n)| < \frac{C_n}{|u|^{1-p_n}} \quad (n = 1, 2, \dots; P(u, v) \prec R'; p_n \prec (0, 1)) \quad (13.9)$$

gilt. — Der Beweis dafür ergibt sich offenbar sofort auf Grund des folgenden Hilfssatzes:

62. **Hilfssatz 4.** $f(\xi, \eta)$ sei eine beliebige Funktion, die auf R_l meßbar ist und für welche fast überall

$$|f(\xi, \eta)| < M \quad (P(\xi, \eta) \prec R_l, M = \text{Const.}) \quad (13.10)$$

gilt, und $\varphi(u, v)$ eine meßbare Funktion, welche für jedes feste v totalstetig ist in u auf jedem Rechteck $R' \prec (R_{2l}(O))$ der uv -Ebene.

Existiert dann zu jedem R' eine Konstante C'' , so daß fast überall auf R' für ein beliebiges $p \prec (0, 1)$

$$|\varphi'_u(u, v)| < \frac{C''}{|u|^{1-p}} \quad (13.11)$$

gilt, dann ist (13.4) für jeden beliebigen aber festen Punkt $Q_0(x, y) \prec (R_l)$ erfüllt, sofern das Integral links in (13.4) für alle Punkte Q aus einer Umgebung von Q_0 existiert.

63. **Beweis.** Wiederum betrachten wir für eine beliebige Zahlenfolge $x_\nu \rightarrow x$ ($\nu \rightarrow \infty$) die von einem ν_0 an existierende Folge der Integrale (13.5).

Wegen Voraussetzung (13.11) ist für alle ξ und fast alle η , welche als Argumente von $\varphi'_u(\xi - x, \eta - y)$ in Betracht kommen:

$$\int_{-x}^{-x_\nu} |\varphi'_u(u, \eta - y)| du < \left| \int_{\xi-x}^{\xi-x_\nu} \frac{C''}{|u|^{1-p}} du \right| = \frac{C''}{p} \left| |\xi - x_\nu|^p + \varepsilon |\xi - x|^p \right|^{32},$$

wobei

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{für } \xi < \langle x, x_v \rangle \\ -1 & \text{für } \xi \nless \langle x, x_v \rangle \end{cases}$$

ist. Zuzolge (13.7) gilt daher für fast alle Punkte $P(\xi, \eta) < R_i$

$$|\beta_v(\xi, \eta)| < \frac{C''}{p} \left| \frac{|\xi - x_v|^p + \varepsilon |\xi - x|^p}{x_v - x} \right| \equiv \frac{C''}{p} \cdot \Delta \quad (13.12)$$

Zur Abschätzung des letzten Ausdrucks führen wir in Δ die Variablen $\xi - x_v = u$, $\xi - x = v$ ein und beweisen sodann die Ungleichung

$$\Delta = \left| \frac{|u|^p + \eta |v|^p}{v - u} \right| < \frac{2}{|v|^{1-p}} \quad (u \neq v), \quad (13.13)$$

wobei

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{für } uv \leq 0 \\ -1 & \text{für } uv > 0 \end{cases}$$

ist.

Zum Beweis setzen wir $|u| = U$, $|v| = V$. Dann können wir die behauptete Ungleichung in der Gestalt schreiben

$$\frac{U^p + \eta V^p}{U + \eta V} < \frac{2}{V^{1-p}} \quad (U, V \geq 0; \quad U + V > 0; \quad U \neq V \text{ für } \eta = -1)$$

oder, wenn mit V^{1-p} multipliziert und $\frac{U}{V} = z$ gesetzt wird,

$$\frac{z^p + \eta}{z + \eta} < 2 \quad (z \geq 0, \quad z \neq 1 \text{ für } \eta = -1, \quad 0 < p < 1). \quad (13.14)$$

Unter Benutzung der Relationen $1 \geq z^p \geq z$ ($0 \leq z \leq 1$) und $z^p \leq z$ ($z \geq 1$) zeigt man jetzt sofort, daß (13.14) in jedem der Fälle $\eta = 1$, $\eta = -1$ richtig ist, womit (13.13) bewiesen ist.

Mit Hilfe von (13.13) gewinnt man jetzt aus (13.12) die für fast alle Punkte $P(\xi, \eta) < R_i$ gültige Ungleichung

$$|\beta_v(\xi, \eta)| < \frac{2C''}{p} \cdot \frac{1}{|\xi - x|^{1-p}}.$$

Hieraus ergibt sich im Verein mit (13.10) wiederum die Existenz einer integrierbaren Majoranten $\chi(\xi, \eta)$ für die Funktionen $f \cdot \beta_v$, so daß (13.8) gilt. Das Ende des Beweises kann jetzt analog geführt werden wie im Falle des Kriteriums I.

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

- B.H.Camp* (I). Singular Multiple Integrals with Applications to Series, Transactions of the American Math. Society, Vol. 14 Nr. 1 (1913), pp. 42—64.
- C.Caratheodory* (I). Vorlesungen über reelle Funktionen, (1918).
- H.Hahn* (I). Über die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale, Denkschr. der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien, Bd. 93 (1917), pp. 585 bis 692.
- O.Haupt* und *G.Aumann* (I). Differential- und Integralrechnung, Bd. III (1938), pp. 164—169.
- I.W.Hobson* (I) und (II). The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series:
 (I) Vol.I, 3rd ed. (1927),
 (II) Vol.II, 2nd ed. (1926).
- H.Lebesgue* (I). Sur les Intégrales Singulières, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, (3), t.I (1909), pp. 25—117.
- A.Ostrowski* (I). Sur les conditions de validité d'une classe de relations entre les expressions différentielles linéaires, Comm. Math. Helv. Vol. 15 (1942/43), Fasc. III, pp. 269—286.
- A.Ostrowski* (II). Note sur l'interversion des dérivations et les différentielles totales, Comm. Math. Helv. Vol. 15 (1942/43), Fasc. III, pp. 222—223.
- Th.Radacović* (I). Über die Interpolation von Funktionen mehrerer Veränderlicher, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien, Math. Nat. Klasse, Abt. 2a, Bd. 136 (1927), Fasc. 1—10, pp. 87—113.

(Eingegangen den 15. Juli 1946.)

Beiträge zur Theorie der singulären Integrale bei Funktionen von mehreren Variablen II *)

Von ROLF CONZELMANN, Basel

§ 1. Einleitung

1. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit Anwendungen der im ersten Teil dieser Beiträge gewonnenen Sätze auf die bekanntesten Kerne singulärer Integrale.

Zum Verständnis dieses zweiten Teils genügt es, vom ersten Teil die Einleitung, die Sätze V bis VIII, sowie die Kriterien I und II in § 13 sich in Erinnerung zu rufen. Über die in beiden Teilen verwendeten besonderen Bezeichnungen und Begriffe orientiert ein Verzeichnis am Ende dieser Arbeit. Wenn im folgenden Aussagen des ersten Teils zitiert werden, so geschieht dies unter Verwendung der leicht verständlichen Symbolik: (1 ; 6.3) für Formel (6.3); 1,V für Satz V; 1,Va) für Voraussetzung Va) usw. Die römischen Zahlen hinter den Autorennamen in den Fußnoten verweisen auf das beiden Teilen gemeinsame Literaturverzeichnis am Schlusse des ersten.

2. Für jeden Typus eindimensionaler klassischer Kerne¹⁾ gibt es „Differentiationssätze“, d. h. es gelten — abgesehen von besonders komplizierten Kernen — die Relationen (1 ; 1.2) für alle Funktionen einer bestimmten Klasse²⁾.

Im Falle mehrerer Variablen wird man, um sich die Integrationsarbeit möglichst zu erleichtern, zunächst etwa Kerne untersuchen, die gleich einem Produkt von eindimensionalen Kernen des gleichen Typus sind. Auf solche Kerne werden im folgenden die im ersten Teil aufgestellten Sätze angewandt. Dabei ergeben sich verschiedene Möglichkeiten je nach den über die darzustellende Funktion getroffenen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen (Totales Differential, O -Ableitung, H -Ableitung).

*) Siehe *Comm. Math. Helv.*, Vol. 19 (1946/47), Fasc. IV, pp. 279—315.

¹⁾ Darunter sind im folgenden die allgemein bekannten Kerne zu verstehen, welche nach der in *H. Hahn* (I) gegebenen Klassifikation in die Kerne vom *Stieltjesschen*, *Poissonschen* und *Weierstraßschen* Typus zerfallen.

²⁾ *H. Hahn* (I).

3. Im Falle der O -Ableitung zeigt sich ein unerwarteter und eigentümlicher Sachverhalt, für den es in einer Dimension kein Analogon gibt, und auf den erstmals Herr *Ostrowski* aufmerksam gemacht hat. Es scheint nämlich für $m \geq 2$ überhaupt keine m -dimensionalen Kerne zu geben, die gleich einem Produkt von m klassischen eindimensionalen Kernen desselben Typus sind, so daß eine beliebige der Relationen (1; 1.4) für jede stetige Funktion f gilt, die im „singulären Punkt“ bloß O -differenzierbar nach der betreffenden Variablen vorausgesetzt wird³⁾.

Ein Beweis der Richtigkeit dieser Vermutung für sehr allgemeine *Stieltjes*- und *Poissonsche* Kerne ist enthalten in den beiden auf diese Kerne bezüglichen Sätzen VII und VIII (in den Nummern 22 bzw. 47) dieser Arbeit. Der Beweis obiger Vermutung für Kerne vom *Weierstraßschen* Typus wird sich bei späterer Gelegenheit in anderem Zusammenhang ergeben.

4. Herr *Ostrowski*⁴⁾ hat einen neuen, formal sehr einfachen Kern angegeben, welcher den oben beschriebenen Mangel der klassischen Kerne nicht aufweist, und der z. B. für die in Fußnote 4 zitierte Arbeit von ganz fundamentaler Bedeutung ist. Weitere Untersuchungen über Kerne mit analogen Eigenschaften bleiben einer späteren Arbeit vorbehalten.

Wie bereits im ersten Teil habe ich auch hier für die Darstellung stets $m = 2$ Variable gewählt. Wo die Verhältnisse für mehr als zwei Variable nicht ganz analog liegen, wird jeweils besonders darauf hingewiesen werden.

Für die vielseitige Unterstützung, die mir Herr Prof. Dr. *A. Ostrowski* auch bei der Bearbeitung dieses zweiten Teils gewährt hat, bin ich meinem verehrten Lehrer zu großem Dank verpflichtet.

§ 2. Hilfssätze

5. Mit einer beliebig vorgegebenen Größe $l > 0$ bilden wir das (offene) Intervall $(-l, l) \equiv (L)$. Unter einem Einerkern auf (L) soll dann im folgenden eine Funktionenfolge $\psi(u, n)$ $n = 1, 2, \dots$ verstanden werden, deren Glieder bis auf Nullmengen $\mathfrak{N}_n$ auf (L) definiert und über L integrierbar sind. Wir wollen sagen, der Einerkern ψ auf (L) sei totalstetig,

³⁾ *A. Ostrowski* (I), p. 269. In der zitierten Arbeit beziehen sich die Aussagen über diesen Punkt zwar auf eine Relation, die sich von der unter (1; 1.4) notierten dadurch unterscheidet, daß die Operationen der Integration und der Differentiation miteinander vertauscht sind. Wir werden jedoch in den Nummern 30 und 46 nachweisen, daß diese beiden Relationen für die zur Diskussion stehenden klassischen Kerne miteinander äquivalent sind.

⁴⁾ *A. Ostrowski* (I), p. 270.

wenn $\psi(u, n)$ für jedes n in jedem (abgeschlossenen) Teilintervall $L' < (L)$ totalstetig ist.

Gilt für jedes hinreichend kleine $h > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-h}^h \psi(u, n) du = \varrho, \quad \int_{-h}^h |\psi(u, n)| du < N \quad (n = 1, 2, \dots),$$

so werden wir sagen, ψ sei ϱ -strebzig im Ursprung bzw. genüge einer N -Ungleichung im Ursprung.

Wir bezeichnen mit $(R_{2l}(O))$ ein offenes achsenparalleles Quadrat mit der Seitenlänge $2l$, dessen Zentrum O ist. Schließlich heiße $\psi(u, n) \varphi(v, n)$ $n = 1, 2, \dots$ ein Produktkern auf $(R_{2l}(O))$, wobei $\psi(u, n)$ und $\varphi(v, n)$ Einerkerne auf (L) sind, wenn der erste Faktor dieses Produkts totalstetig ist und wenn

$$\psi(u, n) \varphi(v, n) \Rightarrow 0 \quad (P(u, v) < R^* < (R_{2l}(O)), \quad n \rightarrow \infty)^5 \quad (2.1)$$

gilt, und zwar gleichmäßig für alle Punkte $P(u, v)$ eines beliebigen achsenparallelen, abgeschlossenen Rechtecks $R^* < (R_{2l}(O))$, das den Nullpunkt nicht enthält. Ist $\varphi = \psi$, so sprechen wir von einem symmetrischen Produktkern.

6. Unter Benutzung des in den Nummern 28 und 29 im ersten Teil definierten Begriffs des Verschiebungskerns können wir jetzt einen Hilssatz wie folgt formulieren:

Hilssatz 1. *Jeder Produktkern auf $(R_{2l}(O))$ ist ein Verschiebungskern auf $(R_{2l}(O))$.*

Die Relation (2.1) ist offenbar äquivalent mit (1; 6.3), und der Beweis ist erbracht, sobald wir wissen, daß die Produkte $\Phi = \psi(u, n) \varphi(v, n)$, $\Phi'_u = \psi'(u, n) \varphi(v, n)$ über jedes Rechteck $R' < (R_{2l}(O))$ integrierbar sind.

⁵⁾ Da es sich in dieser Nummer durchwegs um Produkte von Einerkernen handelt, wäre es wünschenswert, alle Voraussetzungen in Relationen zu fassen, die bloß von je einer Variablen abhängen. Wollte man dieser Forderung konsequent entsprechen, so hätte man jedenfalls oft sehr komplizierte Bedingungen in Kauf zu nehmen.

Es ist besonders bemerkenswert, daß die Relation (2.1) im Falle $\varphi = \psi$ eine für $\psi(u, n)$ dimensionsabhängige Bedingung ist. Es kann nämlich sehr wohl sein, daß (2.1) für $\varphi = \psi$ gilt, während die entsprechende Bedingung für drei und mehr Variable für denselben Einerkern ψ nicht erfüllt ist. Eine entsprechende „Verschlechterung“ ist natürlich bereits beim Übergang von einer zu zwei und mehr Dimensionen zu beobachten.

Nach (1; 7.2) ist

$$\int_{-l'}^{l'} |\psi'(u, n)| du = T_n(-l', l') \quad (0 < l' < l),$$

wo $T_n(-l', l')$ die Totalvariation von $\psi(u, n)$ im Intervall $\langle -l', l' \rangle$ bedeutet. Zusammen mit der Existenz der Integrale

$$\int_{-l'}^{l'} |\psi(u, n)| du, \quad \int_{-l'}^{l'} |\varphi(v, n)| dv \quad (0 < l' < l)$$

ergibt sich die Existenz von

$$\int_{\mathcal{R}'} |\psi(u, n) \varphi(v, n)| du dv, \quad \int_{\mathcal{R}'} |\psi'(u, n) \varphi(v, n)| du dv$$

und somit die Integrabilität von Φ und Φ'_u . —

7. Hilfssatz 2. Ist $\psi(u, n) \varphi(v, n)$ ein Produktkern auf $(R_{2l}(O))$ und ist $\varphi(v, n)$ für ein $\varrho \neq 0$ ϱ -strebzig im Ursprung, so gilt für jedes hinreichend kleine $h > 0$:

$$\psi(h, n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Wäre die Behauptung falsch, so existierten zu beliebig kleinen $h > 0$ je ein $\mu > 0$ und eine Folge n_ν ($\nu = 1, 2, \dots$), so daß $|\psi(h, n_\nu)| > \mu$ für alle ν gälte. Wegen (2.1) wäre dann $\varphi(v, n_\nu)$ nach 0 konvergent, und zwar gleichmäßig für alle $v < \langle -h, h \rangle$, was aber der ϱ -Strebzigkeit von φ widerspräche. —

§ 3. Differentiationssätze im Falle des totalen Differentials und der H -Ableitung für Produktkerne

8. Unter Benutzung des Hilfssatzes 1 ergibt sich aus Satz 1, VI, wie man sich sofort überzeugt, der folgende:

Satz I. Es sei $\psi(u, n) \varphi(v, n)$ ein Produktkern auf $(R_{2l}(O))$ und $Q_0(x, y)$ ein beliebiger aber fester Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates R_1 der $\xi\eta$ -Ebene.

Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_1 zu F_i ($i = 1, 2$) gehört und in Q_0 ein totales Differential besitzt, die Relationen

$$f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_l} f(\xi, \eta) \psi(\xi - x, n) \varphi(\eta - y, n) d\xi d\eta \quad (3.1)$$

$$f'_\xi(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_l} f(\xi, \eta) \frac{\partial \psi(\xi - x, n)}{\partial x} \varphi(\eta - y, n) d\xi d\eta \quad (3.2)$$

gelten, ist notwendig und hinreichend:

a) (oder a°). Für den zu $\Phi'_u = \psi'(u, n) \varphi(v, n)$ gehörigen gelochten Kern gilt $1, Va$) (bzw. $1, Va^\circ$)⁶).

b_1) und b_2). Es existieren positive Konstanten N und h , so daß für alle n

$$b_1) \quad \int_{-h}^h |u \psi'(u, n)| du \cdot \int_{-h}^h |\varphi(u, n)| du < N,$$

$$b_2) \quad \int_{-h}^h |\psi'(u, n)| du \cdot \int_{-h}^h |u \varphi(u, n)| du < N$$

gilt.

c_1) und c_2) Es existiert eine Konstante $\varrho \neq 0$, so daß ψ ϱ -strebzig und φ $\frac{1}{\varrho}$ -strebzig ist im Ursprung.

9. Für $\varphi = \psi$ nimmt dieser Satz, wie wir sogleich beweisen werden, die etwas einfachere Gestalt an:

Satz II. Es sei $\psi(u, n) \varphi(v, n)$ ein symmetrischer Produktkern auf $(R_{2l}(O))$ und $Q_0(x, y)$ ein beliebiger aber fester Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates R_l der $\xi\eta$ -Ebene.

Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_l zu F_i ($i = 1, 2$) gehört und in Q_0 ein totales Differential besitzt, die Relationen

$$f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_l} f(\xi, \eta) \psi(\xi - x, n) \varphi(\eta - y, n) d\xi d\eta \quad (3.3)$$

$$f'_\xi(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_l} f(\xi, \eta) \frac{\partial \psi(\xi - x, n)}{\partial x} \varphi(\eta - y, n) d\xi d\eta \quad (3.4)$$

gelten, ist notwendig und hinreichend:

⁶) a) (oder a°) bedeutet hier und in den folgenden Sätzen, daß die Voraussetzung a), welche sich auf $1, Va$) a. p. 298 bezieht, nach Belieben durch die Voraussetzung a°) ersetzt werden kann, welche auf $1, Va^\circ$) a. p. 299 Bezug nimmt.

a) (oder a°)) Für den zu $\Phi'_u = \psi'(u, n) \psi(v, n)$ gehörigen gelochten Kern gilt 1, Va) (bzw. 1, Va°))⁶⁾.

b₁) $u \psi'(u, n)$ genügt einer N -Ungleichung im Ursprung.

b₂) Es existieren positive Konstanten N und h , so daß für alle n

$$\int_{-h}^h |\psi'(u, n)| du \cdot \int_{-h}^h |u \psi(u, n)| du < N$$

gilt.

c) ψ ist eins-strebig im Ursprung.

Beweis. Wir haben offenbar bloß nachzuweisen, daß Ib₁) für $\varphi = \psi$ erfüllt und IIb₁) notwendig ist.

In der Tat erhält man durch partielle Integration

$$\int_{-h}^h |\psi(u, n)| du = u |\psi(u, n)| \Big|_{-h}^h - \int_{-h}^h u \psi'(u, n) \operatorname{sgn} \psi du,$$

wobei $\operatorname{sgn} \psi = 1$ für $\psi \geq 0$ und $\operatorname{sgn} \psi = -1$ für $\psi < 0$ ist.

Wegen Hilfssatz 2 strebt der ausintegrierte Bestandteil mit $n \rightarrow \infty$ nach 0, während das letzte Integral zufolge IIb₁) absolut beschränkt ist. Also ist auch die linke Seite absolut beschränkt, und zusammen mit IIb₁) folgt hieraus die Gültigkeit von Ib₁). —

Wäre IIb₁) nicht erfüllt, so würde für jedes hinreichend kleine $h > 0$ und eine gewisse von h abhängige Folge n_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) die rechte und daher auch die linke Seite der Ungleichung

$$\int_{-h}^h |u \psi'(u, n_\nu)| du \cdot \int_{-h}^h |\psi(v, n_\nu)| dv \geq \int_{-h}^h |u \psi'(u, n_\nu)| du \cdot \left| \int_{-h}^h \psi(v, n_\nu) dv \right|$$

über alle Grenzen wachsen, da der zweite Faktor rechts nach 1 strebt. Also könnte Ib₁) für $\varphi = \psi$ nicht gelten. —

10. Ganz analog wie die Sätze I und II ergeben sich, jetzt unter Berufung auf Satz 1, VII, die beiden folgenden:

Satz III. Es sei $\psi(u, n) \varphi(v, n)$ ein Produktkern auf $(R_{21}(O))$ und $Q_0(x, y)$ ein beliebiger aber fester Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates R_i der $\xi\eta$ -Ebene.

Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_i zu F_i ($i = 1, 2$) gehört und in Q_0 stetig und H -differenzierbar nach ξ ist, die Relationen (3.1), (3.2) gelten, ist notwendig und hinreichend, daß die Voraussetzungen Ia) (oder a°), b_1), c_1), c_2) erfüllt sind.

Die Voraussetzung Ib₂) kommt also in Wegfall.

Satz IV. Es sei $\varphi(u, n) \varphi(v, n)$ ein symmetrischer Produktkern auf $(R_{2l}(O))$ und $Q_0(x, y)$ ein beliebiger aber fester Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates R_i der $\xi\eta$ -Ebene.

Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_i zu F_i ($i = 1, 2$) gehört und in Q_0 stetig und H -differenzierbar nach ξ ist, die Relationen (3.3), (3.4) gelten, ist notwendig und hinreichend, daß die Voraussetzungen IIa) (oder a°), b_1), c) erfüllt sind.

§ 4. Differentiationssätze im Falle der O -Ableitung für Produktkerne

11. Der nächste Satz verlangt die Einführung speziellerer Einerkerne. Es sei fast überall in einer Umgebung $\mathfrak{U}(O)$ des Nullpunktes für den Einerkern φ :

$$\varphi(v, n) \geq 0, \quad \varphi(-v, n) = \varphi(v, n) \quad (v < \mathfrak{U}(O), \quad n = 1, 2, \dots) \quad (4.1)$$

Ein solcher Kern heiße in $\mathfrak{U}(O)$ ein positiver gerader Einerkern. — Ist φ ein totalstetiger Einerkern und gilt fast überall in $\mathfrak{U}(O)$

$$u\varphi'(u, n) \leq 0, \quad \varphi(-u, n) = \varphi(u, n) \quad (u < \mathfrak{U}(O), \quad n = 1, 2, \dots) \quad (4.2)$$

so wollen wir sagen, φ sei in $\mathfrak{U}(O)$ ein gerader Glockenkern⁷⁾.

Satz V. Es sei $\varphi(u, n) \varphi(v, n)$ ein Produktkern auf $(R_{2l}(O))$, und in $\mathfrak{U}(O)$ sei φ ein positiver gerader Einerkern und φ ein gerader Glockenkern. $Q_0(x, y)$ bezeichne einen beliebigen aber festen Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates R_i der $\xi\eta$ -Ebene.

Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_i zu F_i ($i = 1, 2$) gehört und in Q_0 stetig und O -differenzierbar nach ξ ist, die Relationen (3.1), (3.2) gelten, ist notwendig und hinreichend:

a) (oder a°) Für den zu $\Phi'_u = \varphi'(u, n) \varphi(v, n)$ gehörigen gelochten Kern gilt $1, Va$) (bzw. $1, Va^\circ$)).

⁷⁾ Die Wahl von Glockenkernen scheint für das Folgende eine besonders einschneidende Beschränkung zu sein. Es wird sich aber erweisen, daß die klassischen Kerne (vgl. Fußnote 1), abgesehen von den kompliziertesten Fällen, Glockenkerne sind.

$b_1)$ und $b_2)$ Es existiert eine Konstante $\varrho > 0$, so daß ψ ϱ -strebzig und φ $\frac{1}{\varrho}$ -strebzig ist im Ursprung.

c) Es existiert eine Konstante M_1 , so daß für jedes hinreichend kleine $h > 0$ und alle n

$$E_n \equiv \int_0^h \varphi(v, n) \{ \psi(0, n) - \psi(v, n) \} dv < M_1 \quad (4.3)$$

gilt.

12. Beweis. Wir beweisen die Äquivalenz obiger Voraussetzungen mit jenen von Satz 1, VIII.

1, VIIIa) und 1, VIIIc) sind äquivalent mit a) bzw. $b_1)$ und $b_2)$. — 1, VIIIb) ist sicher erfüllt, wenn $u \psi'(u, n) \varphi(v, n)$ im Ursprung sogar einer N -Ungleichung genügt. Wir weisen daher jetzt $Ib_1)$ als erfüllt nach:

Wegen (4.2) ist für jedes hinreichend kleine $h > 0$

$$\int_{-h}^h |u \psi'(u, n)| du = -u \psi(u, n) \Big|_{-h}^h + \int_{-h}^h \psi(u, n) du.$$

Unter Beachtung des Hilfssatzes 2 und der ϱ -Strebzigkeit von ψ erkennt man, daß das Integral linker Hand für $n \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt. Andererseits ist $\int_{-h}^h |\varphi| dv$ für hinreichend kleine $h > 0$ in n gleichmäßig beschränkt wegen der Positivität und der $\frac{1}{\varrho}$ -Strebzigkeit von φ . Also

ist $Ib_1)$ und somit auch 1, VIIIb) erfüllt.

13. Es bleibt noch einzusehen, daß 1, VIII d) äquivalent ist mit c). In der Tat ist, wenn $\psi(u)$, $\varphi(v)$ anstatt $\psi(u, n)$, $\varphi(v, n)$ geschrieben wird,

$$\begin{aligned} \int_{v_h(0)} \int |\psi'(u) \varphi(v)| du dv &= \int_{-h}^0 \int_v^{-v} |\psi'(u) \varphi(v)| du dv + \int_0^h \int_{-v}^v |\psi'(u) \varphi(v)| du dv = \\ &= \int_{-h}^0 \varphi(v) \int_v^0 \psi'(u) du dv - \int_{-h}^0 \varphi(v) \int_0^{-v} \psi'(u) du dv + \\ &\quad + \int_0^h \varphi(v) \int_{-v}^0 \psi'(u) du dv - \int_0^h \varphi(v) \int_0^v \psi'(u) du dv = \\ &= \int_{-h}^0 \varphi(v) [\psi(0) - \psi(v)] dv + \int_{-h}^0 \varphi(v) [\psi(0) - \psi(-v)] dv + \\ &\quad + \int_0^h \varphi(v) [\psi(0) - \psi(-v)] dv + \int_0^h \varphi(v) [\psi(0) - \psi(v)] dv. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Zufolge der Geradheit von ψ , φ in $\mathfrak{U}(O)$ ist für jedes hinreichend kleine $h > 0$ die letzte Summe gleich der wegen (4.1), (4.2) positiven Größe

$$4 \int_0^h \varphi(v) [\psi(0) - \psi(v)] dv .$$

Dies ist gerade das Vierfache des Ausdrucks, von dem wir unter c) die Beschränktheit vorausgesetzt haben. Damit ist bewiesen, daß die Bedingungen a), $b_1)$, $b_2)$, c) notwendig und hinreichend sind.

14. Anmerkung. Will man darauf verzichten, in den Voraussetzungen dieses Satzes ψ und φ in $\mathfrak{U}(O)$ als gerade anzunehmen, so hat man offenbar c) durch die Forderung zu ersetzen, daß jedes einzelne der vier Integrale in (4.4) für $n \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt. Diese Forderung ist nämlich auch notwendig, weil alle vier Integrale nicht negativ sind.

15. Für $\varphi = \psi$ erhält man aus Satz V sofort den folgenden:

Satz VI. *Es sei $\psi(u, n) \psi(v, n)$ ein symmetrischer Produktkern auf $(R_{2l}(O))$, und $\psi(u, n)$ sei in $\mathfrak{U}(O)$ ein positiver gerader Glockenkern. $Q_0(x, y)$ bezeichne einen beliebigen aber festen Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates R_l der $\xi\eta$ -Ebene.*

Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_l zu F_i ($i = 1, 2$) gehört und in Q_0 stetig und O -differenzierbar nach ξ ist, die Relationen (3.3), (3.4) gelten, ist notwendig und hinreichend:

a) (oder a°) Für den zu $\Phi'_u = \psi'(u, n) \psi(v, n)$ gehörigen gelochten Kern gilt $1, Va$ (bzw. $1, Va^\circ$).

b) ψ ist eins-strebig im Ursprung.

c) Es existiert eine Konstante M_1 , so daß für jedes hinreichend kleine $h > 0$ und alle n

$$D_n \equiv \int_0^h \psi(u, n) [\psi(0, n) - \psi'(u, n)] du < M_1 \quad (4.5)$$

ist. —

16. Schließlich sei noch bemerkt, daß auf Grund der Sätze I, VI* bis I, VIII* ohne weiteres ersichtlich ist, wie die den Sätzen I bis VI entsprechenden, unter Berücksichtigung der gleichmäßigen Konvergenz zu formulierenden Sätze lauten.

§ 5. Bemerkungen zu den Sätzen V und VI

17. Während sich die Sätze I bis VIII im ersten Teil und daher hier die Sätze I bis IV analog für mehr als zwei Dimensionen formulieren und beweisen lassen, ist in den Sätzen V und VI wegen der Voraussetzung c) eine solche Analogie nicht offensichtlich. Wir wollen daher im Falle von $m > 2$ Dimensionen Bedingungen angeben, die den Voraussetzungen V c) und VI c) entsprechen.

Es sei $\psi_1(u, n)$ auf (L) ein totalstetiger Einerkern, der in $\mathfrak{U}(O)$ ein gerader Glockenkern ist, und es seien $\psi_\mu(u, n)$ ($\mu = 2, \dots, m$) Einerkerne auf (L) , die alle in $\mathfrak{U}(O)$ positiv und gerade sind. Es mögen ferner m

Konstanten ϱ_μ ($\mu = 1, \dots, m$) mit $\prod_{\mu=1}^m \varrho_\mu = 1$ existieren, so daß $\psi_\mu(u, n)$

($\mu = 1, \dots, m$) ϱ_μ -strebzig ist im Ursprung.

Wir betrachten sodann den m -dimensionalen Produktkern

$$\Phi(x_1, \dots, x_m; n) = \prod_{\mu=1}^m \psi_\mu(x_\mu, n) \quad (|x_\mu| < l, \mu = 1, \dots, m)$$

in den m Variablen x_μ ($\mu = 1, \dots, m$) und bezeichnen für ein beliebiges $h > 0$ mit $U_h(O)$ jetzt den Bereich

$$|x_\mu| \leq h \quad (\mu = 1, \dots, m), \quad |x_\mu| \leq |x_1| \quad (\mu = 2, \dots, m)$$

und mit $V_h(O)$ den Bereich $R_{2h}(O) - U_h(O)$, wobei $R_{2h}(O)$ hier ein um den Ursprung als Zentrum gelegtes, achsenparalleles m -dimensionales Intervall mit der Seitenlänge $2h$ bedeutet.

Die Lösung unseres Problems gibt der folgende Satz, worin (5.1) jene Voraussetzung ist, die der Voraussetzung I, VIII d) im Fall von $m = 2$ Dimensionen entspricht.

18. **Satz.** *Damit eine Konstante M_0 und ein $h > 0$ existieren, so daß für alle n*

$$\int_{V_h(O)} |\Phi'_1(x_1, \dots, x_m; n)| dP < M_0 \quad (dP = dx_1 \dots dx_m) \quad (5.1)$$

gilt, ist notwendig und hinreichend, daß für $\psi = \psi_1(x_1, n)$ und $\varphi = \psi_\mu(x_\mu, n)$ ($\mu = 2, \dots, m$) die sich so ergebenden $m - 1$ Relationen (4.3) erfüllt sind. — Hieraus folgt offenbar, daß im Falle $\psi_\mu = \psi_1 \equiv \psi$ ($\mu = 2, \dots, m$) die Gültigkeit von VI c) zu fordern ist.

19. Beweis. Mit Δ_μ ($\mu = 2, \dots, m$) sei für ein festes μ jener in der $x_1 x_\mu$ -Koordinatenebene liegende (nicht abgeschlossene) Bereich bezeichnet, für dessen Punkte $P(x_1, x_\mu)$

$$|x_1|, |x_\mu| \leq h, \quad |x_1| < |x_\mu|$$

gilt.

Um die Notwendigkeit unserer Behauptung zu beweisen, beachte man jetzt, daß der m -dimensionale Bereich Δ_2^* , welcher durch die Gesamtheit der Punkte $P(x_1, \dots, x_m)$ mit

$$P(x_1, x_2) < \Delta_2, \quad |x_\mu| \leq h \quad (\mu = 3, \dots, m)$$

festgelegt wird, ein Teilbereich von $V_h(O)$ ist. Daher folgt aus (5.1), wenn wir iteriert, zuerst nach x_1 und x_2 und sodann nach den übrigen Variablen integrieren

$$\int_{\Delta_2^*} |\Phi'_{x_1}| dP = \int_{\Delta_2} |\psi'_1(x_1, n) \psi_2(x_2, n)| dx_1 dx_2 \int_{Q_2} \prod_{\mu=3}^m |\psi_\mu(x_\mu, n)| dx_3 \dots dx_m < M_0 \quad (5.2)$$

für alle n , wobei Q_2 das durch $|x_\mu| \leq h$ ($\mu = 3, \dots, m$) definierte $(m-2)$ -dimensionale Intervall bezeichnet. Das über Q_2 erstreckte Integral in (5.2) strebt mit $n \rightarrow \infty$ gegen eine feste, von 0 verschiedene Konstante, da

$$\int_{Q_2} \prod_{\mu=3}^m |\psi_\mu(x_\mu, n)| dx_3 \dots dx_m = \prod_{\mu=3}^m \int_{-h}^h \psi_\mu(x_\mu, n) dx_\mu$$

ist und die ψ_μ ($\mu = 1, \dots, m$) ϱ_μ -strebzig sind.

Wäre jetzt Relation (4.3), welche ja, wie wir in Nummer 13 gesehen haben, mit 1, VIII d) äquivalent ist, nicht erfüllt für $\psi = \psi_1$, $\varphi = \psi_2$, so wäre das Integral über Δ_2 in (5.2) für $n \rightarrow \infty$ nicht beschränkt und (5.2) könnte nicht gelten. — Indem man x_2 mit x_μ ($\mu = 3, \dots, m$) permutiert, erkennt man die Notwendigkeit aller aufgestellten Bedingungen.

Daß die Voraussetzungen auch hinreichend sind, geht aus den an (5.2) angeknüpften Überlegungen hervor, wenn man berücksichtigt, daß die $m-1$ Bereiche Δ_μ^* ($\mu = 2, \dots, m$) den Bereich $V_h(O)$ überdecken.

§ 6. Produktkerne vom Stieltjes-Hahnschen Typus

20. Mit *H. Hahn* nennen wir ψ einen *Stieltjesschen* Einerkern, wenn ψ die folgende Gestalt hat: Es sei für jeden Parameterwert $k \geq 1$:

$$\psi(u, k) = C k^{\frac{1}{p}} |\chi(u)|^k \quad (u < (-l, l) \equiv (L)) ;$$

$$C = \frac{p \cdot \alpha^{\frac{1}{p}}}{2 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \quad \alpha, p > 0 ;$$

$$\chi(u) = 1 - \alpha |u|^p + \omega(u) |u|^p \quad \lim_{u \rightarrow 0} \omega(u) = 0 .$$

Ferner sei $\sup |\chi(u)| < 1$ für jedes Teilintervall $L^* < (L)$, das den Nullpunkt nicht enthält, und es sei $\omega(u)$ meßbar auf L^8 .

*Hahn*⁸⁾ hat insbesondere gezeigt, daß für jede Funktion $f(\xi)$ ($\xi < (L)$) aus der Klasse F_1 in einem Stetigkeitspunkt die Relation (1; 1.1) mit $J = L$ und einem *Stieltjesschen* Einerkern $K = \psi(\xi - x, k)$, $n = k$ ⁹⁾ gilt.

Einen *Stieltjesschen* Einerkern wollen wir insbesondere einen *Stieltjes-Hahnschen* Einerkern nennen, wenn $\chi(u)$ in jedem (abgeschlossenen) Intervall $L' < (L)$ totalstetig ist und bis auf eine Nullmenge die Ungleichung

$$|\chi'(u)| < A |u|^{p-1} \quad (u < L', A = \text{Const.}) \quad (6.1)$$

befriedigt.

Ist $\psi(u, k)$ ein Einerkern von letzterer Art, so gelten nach *Hahn*⁸⁾ insbesondere die Relationen (1; 1.2) mit $K = \psi(\xi - x, k)$, $n = k$, $J = L$, $s = 1$ in jedem Punkt $x < (L)$ einer beliebigen Funktion $f(\xi)$, die auf L zu F_1 gehört und für $\xi = x$ differenzierbar ist.

21. Im Falle von zwei Dimensionen stellen wir jetzt als Beispiel zu den Sätzen II, IV, V den folgenden Satz auf:

Satz VII¹⁰⁾. *Es sei $\psi(u, k)$ ein Stieltjes-Hahnscher Einerkern auf (L) und $Q_0(x, y)$ ein beliebiger aber fester Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates R_η der $\xi\eta$ -Ebene.*

⁸⁾ *H. Hahn* (I), pp. 623—643. Der Einfachheit halber hat *Hahn* solche Einerkerne nur für den Fall benutzt, daß k über die Werte der natürlichen Zahlenreihe nach unendlich strebt. Von dieser unwesentlichen Beschränkung wollen wir absehen und k stetig nach unendlich wachsen lassen. Ferner wurde $\chi(u)$ bei *Hahn* als eine nicht-negative Funktion vorausgesetzt, eine Forderung, auf die man bei den von *Hahn* hier noch zu zitierenden Sätzen verzichten kann.

⁹⁾ Hier und im folgenden soll $n = k$ bedeuten, daß in den betreffenden Ausdrücken an Stelle des diskreten Parameters n der stetig nach unendlich wachsende Parameter k zu setzen ist.

¹⁰⁾ Wie oben sind auch die Sätze VII und VIII der Einfachheit halber für zwei Dimensionen formuliert worden. Aus ihren Beweisen ist aber ersichtlich, daß sich ohne neue Schwierigkeiten ähnliche Sätze auch für mehrere Dimensionen beweisen lassen.

$\alpha)$ Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_i zu F_1 gehört, und in Q_0 stetig ist und daselbst ein totales Differential oder eine H -Ableitung nach ξ besitzt, die Relationen (3.3), (3.4) mit $n = k$ gelten, ist hinreichend, daß $p \geq 1$ ist¹¹⁾.

$\beta)$ Diese letzte Voraussetzung ist notwendig, wenn

$$u \omega'(u) \rightarrow 0 \quad (u \rightarrow 0, \quad u \notin \mathfrak{N}) \quad (6.2)$$

gilt, wobei u für Punkte einer Nullmenge $\mathfrak{N}$ außer acht gelassen wird.

$\gamma)$ Ersetzt man in $\alpha)$ die Klasse F_1 durch die Klasse F_2 , so ist (bereits) $p > 0$ hinreichend.

$\delta)$ Es sei $\psi_0(u, k)$ ein weiterer Einerkern auf (L) jedoch bloß vom Stieltjes'schen Typus, der im einzelnen durch die Größen $C_0, p_0, \alpha_0, \chi_0, \omega_0$ charakterisiert sei. — Unter den Voraussetzungen $p_0 \geq p$ und (6.2) kann die Relation (3.2) mit $\varphi = \psi_0, n = k$ nicht für jede auf R_i stetige Funktion $f(\xi, \eta)$ gelten, die in Q_0 (bloß) eine O -Ableitung nach ξ besitzt.

22. Folgerungen aus $\delta)$. Ist $f(\xi, \eta)$ nach einer beliebigen der beiden Variablen ξ, η O -differenzierbar in Q_0 , und soll die entsprechende partielle Ableitung von f in Q_0 durch ein singuläres Integral mit einem Produktkern approximiert werden, der aus zwei Stieltjes-Hahnschen Einerkernen gebildet ist, für welche (6.2) gilt, so darf laut Satz $\delta)$ weder $p_0 \geq p$ noch $p \geq p_0$ sein. Es existiert also kein Produktkern mit der gewünschten Eigenschaft, womit die in Nummer 3 über Stieltjes'sche Kerne aufgestellte Behauptung im Fall $m = 2$ bewiesen ist. Für $m > 2$ ist aber jene Behauptung auch wahr. Andernfalls müßten zufolge des Satzes in Nummer 18 für die m Hahn-Stieltjes'schen Einerkerne die Relationen (4.3) gelten. Die Unmöglichkeit dieser Ungleichungen wird aber gerade im Beweis zu Satz $\delta)$ erkannt werden.

23. Beim Beweis des Satzes VII wird das Verhalten der Integrale von der Gestalt

$$K_k(\beta, h, p, q) = \int_0^h u^q (1 - \beta u^p)^k du \quad (\beta, h, p > 0; \quad q > -1) \quad (6.3)$$

für $k \rightarrow \infty$ eine entscheidende Rolle spielen. Eine für unsere Zwecke ge-

¹¹⁾ Ein Beweis für die Behauptung $\alpha)$, soweit es sich um das totale Differential handelt, für den Fall $\alpha = 1, p = 2, \omega(u) \equiv 0$, jedoch für n Variable, findet sich in O. Haupt und G. Aumann (I), pp. 164—169.

eignete asymptotische Auswertung ist bereits von *Hahn* vorgenommen worden. Nach *Hahn*¹²⁾ gilt für $\beta h^p < 1$:

$$K_k(\beta, h, p, q) \sim C(p, q, \beta) \cdot k^{-\frac{q+1}{p}} \quad (k \rightarrow \infty), \quad (6.4)$$

wobei

$$C(p, q, \beta) = \frac{1}{p} \beta^{-\frac{q+1}{p}} \Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right) \quad (6.5)$$

ist.

Dem Beweis unseres Satzes sei noch die Bemerkung vorausgeschickt, daß der Buchstabe C , mit diversen Indizes versehen, im folgenden ausschließlich für Größen benutzt wird, die bloß von gewissen Parametern, und zwar nur solchen abhängen können, welche im Laufe der Diskussion konstant gehalten werden.

§ 7. Beweis des Satzes VII: Behauptungen α) und β)

24. Beweis. Es wird genügen, unsere Behauptungen für den Fall zu beweisen, daß der Parameter k über eine beliebige Zahlenfolge $k_n > 1$ ($n = 1, 2, \dots$) nach unendlich strebt.

Zunächst überzeugen wir uns, daß $\psi(u, k_n)$ wegen $\sup |\chi(u)| < 1$ ($u < L^*$) die Relation (2.1) mit $\varphi = \psi$ für jedes $p > 0$ erfüllt. $\psi(u, k_n) \psi(v, k_n)$ ist also ein symmetrischer Produktkern.

Behauptung α) wird bewiesen sein, wenn die Voraussetzungen des Satzes II für die Klasse F_1 als zutreffend erkannt sind. Mit den Voraussetzungen von Satz II treffen nämlich für den Kern auch die Voraussetzungen des Satzes IV zu, wie ein Vergleich der Sätze II und IV zeigt.

IIa^o) für F_1 ist erfüllt: In der Tat gilt fast überall

$$|\chi(u)|' = \chi'(u) \operatorname{sgn} \chi \quad (u < L' < (L)) \quad (7.1)$$

und also unter Beachtung von (6.1)

$$|\psi'(u, k_n)| \leq C_1 k_n^{1+\frac{1}{p}} |\chi(u)|^{k_n-1} \cdot |u|^{p-1} \quad (u < L' < (L)). \quad (7.2)$$

¹²⁾ *H. Hahn* (I), pp. 628—629. An jener Stelle ist die Formel, die hier unter (6.4) steht, bloß für $q > 0$ angegeben. Sie gilt aber auch für alle $q > -1$, was aus der bekannten Formel

$$\int_0^1 t^x (1-t)^y dt = \frac{\Gamma(x+1) \Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} \quad (x > -1, y > -1)$$

analog wie bei *Hahn* folgt.

Daher gilt in jedem Rechteck $R' < (R_{2l}(O))$ mit Ausnahme einer Nullmenge $\mathfrak{N}_n$ für jedes k_n :

$$|\psi'(u, k_n) \psi(v, k_n)| \leq C_2 k_n^{1+\frac{2}{p}} |\chi(u)|^{k_n-1} |\chi(v)|^{k_n} |u|^{p-1} \quad (P(u, v) < R') \quad (7.3)$$

Ist $p \geq 1$, so ist der letzte Ausdruck für $k_n \rightarrow \infty$ in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Rechteck $R^* < (R_{2l}(O))$ gleichmäßig beschränkt. Also ist IIa^o) für F_1 erfüllt. — Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß $p \geq 1$ beim Beweis von α) nur an dieser Stelle benutzt wird.

Die Voraussetzungen IIb₁) und IIc) sind bereits von *Hahn*¹³⁾ (bei der Behandlung des Problems in einer Dimension) für alle $p > 0$ als erfüllt nachgewiesen worden.

25. Wir weisen jetzt IIb₂) nach. Wegen $\omega \rightarrow 0 (u \rightarrow 0)$ kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $h' > 0$ angeben, so daß für alle $u < \langle -h', h' \rangle$

$$0 < 1 - (\alpha + \varepsilon) |u|^p < \chi(u) < 1 - (\alpha - \varepsilon) |u|^p \quad (u < \langle -h', h' \rangle) \quad (7.4)$$

ist. Setzt man $\alpha - \varepsilon = \beta$, so gilt daher für $q \geq 0$, $s \geq 1$ und hinreichend kleine $h > 0$

$$\int_{-h}^h |u|^q |\chi(u)|^s du < 2 \int_0^h u^q (1 - \beta u^p)^s du.$$

Unter Beachtung von (7.3) ergibt sich daher

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^h |\psi'(u, k_n)| du \cdot \int_{-h}^h |v \psi(v, k_n)| dv \leq \\ & \leq C_3 k_n^{1+\frac{2}{p}} \int_0^h u^{p-1} (1 - \beta u^p)^{k_n-1} du \cdot \int_0^h v (1 - \beta v^p)^{k_n} dv, \end{aligned}$$

und dies ist wegen (6.3), (6.4) für hinreichend kleine $h > 0$ äquivalent

$$C_4 k_n^{1+\frac{2}{p}} (k_n - 1)^{-1} k_n^{-\frac{2}{p}} \sim C_4 \quad (k_n \rightarrow \infty).$$

Da C_4 eine von k_n unabhängige Konstante bedeutet, ist IIb₂) erfüllt und damit auch die Behauptung α) bewiesen.

26. Die Behauptung β) beweisen wir, indem wir zeigen, daß der zu $\psi'(u, k_n) \psi(v, k_n)$ gehörige gelochte Kern auf $R' < (R_{2l}(O))$ für $p < 1$

¹³⁾ *H. Hahn* (I), pp. 628—629, 631—632.

nicht fast beschränkt ist und also IIa°) für F_1 nicht erfüllt sein kann. In der Tat gilt, wie man leicht für $u \geq 0$ und $u < 0$ verifiziert, fast überall

$$|\chi'(u)| = \alpha p |u|^{p-1} \left| 1 - \frac{\omega(u)}{\alpha} - \frac{\omega'(u)}{\alpha p} u \right| \quad (u < L' < (L)) ,$$

und wegen (7.1) und (6.2) ist daher für hinreichend kleine $|u|$ fast überall

$$||\chi(u)|'| = |\chi'(u)| > \frac{\alpha p}{2} |u|^{p-1} \quad (u < \mathfrak{U}(O)) , \quad (7.5)$$

wobei $\mathfrak{U}(O)$ eine gewisse Umgebung des Nullpunktes bezeichnet.

Sei $p < 1$. Wir wählen jetzt $h > 0$ so klein, daß neben (7.5) auch

$$|\chi(u)| = \chi(u) \geq \frac{1}{2} \quad (u < \langle -h, h \rangle) \quad (7.6)$$

gilt. Ferner sei R^* ein achsenparalleles Rechteck, welches in $(R_{2h}(O))$ gelegen ist, von der v -Achse halbiert wird und den Nullpunkt weder im Inneren noch auf dem Rande enthält. Wegen (7.5) und (7.6) kann man sodann für jedes n ein symmetrisch zur v -Achse liegendes, von n abhängiges Teilrechteck $R_n^* < R^*$ finden, für dessen Punkte — bis auf eine Nullmenge —

$$|\psi'(u, k_n) \psi(v, k_n)| \geq C_5 k^{1+\frac{2}{p}} |\chi(u)|^{k_n-1} |\chi(v)|^{k_n} \cdot \frac{1}{|u|^{1-p}} \geq k_n$$

ist. Daher kann $\psi'(u, k_n) \psi(v, k_n)$ auf R^* unmöglich fast beschränkt sein. Der dazugehörige gelochte Kern erfüllt also die Voraussetzung IIa°) für F_1 nicht. Damit ist Behauptung β) bewiesen.

§ 8. Fortsetzung des Beweises: Behauptungen γ) und δ)

27. Um γ) zu beweisen, braucht jetzt bloß noch unter der Voraussetzung $0 < p < 1$ die Eigenschaft IIa°) für F_2 , d. h. die gleichgradige Totalstetigkeit des zu $\psi'(u, k_n) \psi(v, k_n)$ gehörigen gelochten Kerns auf $R' < (R_{2l}(O))$ nachgewiesen zu werden. Der Beweis wird erbracht sein, wenn gezeigt werden kann, daß für jedes Rechteck $R^* < (R_{2l}(O))$, das den Nullpunkt nicht enthält,

$$J_n \equiv \int_{R^*} |\psi'(u, k_n) \psi(v, k_n)| du dv \rightarrow 0 \quad (k_n \rightarrow \infty)$$

gilt.

Seien a, b und c, d ($a < b, c < d$) die u - bzw. v -Koordinaten der Eckpunkte von R^* . Wegen (7.2) ist

$$S_n \equiv \int_a^b |\psi'(u, k_n)| du \leq C_1 \int_a^b k_n^{1+\frac{1}{p}} |u|^{p-1} |\chi(u)|^{k_n-1} du \equiv S_n^*.$$

Für $0 \nless \langle a, b \rangle$ strebt der Integrand des letzten Integrals mit $k_n \rightarrow \infty$ gleichmäßig nach 0. Also gilt

$$S_n^* \rightarrow 0, \quad S_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (8.1)$$

Für $a \leq 0 < b$ oder $a < 0 \leq b$ ist wegen (7.4) für jedes hinreichend kleine $h > 0$ und ein geeignetes $\beta > 0$ unter Beachtung von (8.1)

$$S_n^* < S_n^{**} \equiv C_1 k_n^{1+\frac{1}{p}} \int_{-h\sigma_2}^{h\sigma_1} |u|^{p-1} (1-\beta|u|^p)^{k_n-1} du + \varepsilon_n \quad (\varepsilon_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty),$$

wobei $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ oder $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1$ oder $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0$ ist und ε_n ein oder zwei Integrale vom Typus S_n^* darstellt. Mit Hilfe von (6.3), (6.4) erkennt man, daß für hinreichend kleine $h > 0$

$$S_n^{**} \sim C_6 k_n^{1+\frac{1}{p}} (k_n - 1)^{-1} \sim C_6 k_n^{\frac{1}{p}} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (8.2)$$

ist.

Andererseits setzen wir

$$T_n \equiv \int_c^d |\psi(v, k_n)| dv \begin{cases} = \eta_n & \text{für } 0 < c < d \quad \text{oder} \quad c < d < 0 \\ = e_n & \text{für } c < 0 \leq d \quad \text{oder} \quad c \leq 0 < d, \end{cases}$$

wobei im ersten Fall

$$\eta_n \leq C k_n^{\frac{1}{p}} \vartheta^{k_n} \quad (0 < \vartheta < 1; \quad n = 1, 2, \dots) \quad (8.3)$$

und im zweiten Fall wegen der Eins-Strebigkeit von ψ in O , der Positivität von ψ und (8.3)

$$0 < e_n < C_7 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (8.4)$$

gilt.

Falls jetzt R^* die v -Achse trifft, so gilt wegen (8.2) und (8.3)

$$J_n = S_n T_n < S_n^{**} T_n \sim C_6 k_n^{\frac{1}{p}} \eta_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Trifft R^* jedoch die u -Achse, so gilt wegen (8.1) und (8.4)

$$J_n = S_n T_n = S_n e_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) .$$

Trifft R^* keine der beiden Achsen, so strebt J_n erst recht nach 0. Also gilt in jedem Fall $J_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), womit γ) bewiesen ist.

28. Wir wenden uns jetzt der Behauptung δ) zu und zeigen zunächst, daß es für deren Beweis genügt, die Bedingung c) von Satz V als nicht erfüllt nachzuweisen. Satz V bezieht sich auf Funktionen aus der Klasse F_1 bzw. F_2 . Wir haben aber bereits in Nummer 1,55 darauf hingewiesen, daß die Voraussetzung 1,VIII d), mit welcher ja V c) äquivalent ist, für die Gültigkeit von (1; 10.2) notwendig ist, sogar wenn an die Stelle von F_i ($i = 1, 2$) bloß die Klasse der auf R_i durchweg stetigen Funktionen zur Konkurrenz zugelassen wird.

Ferner beachte man, daß auf Grund der Anmerkung in Nummer 14 die Voraussetzung V c) auch im Falle von nicht geraden Glockenkernen notwendig ist.

Da in jedem Intervall $L^* < (L)$, das den Nullpunkt nicht enthält, $\text{Sup } |\chi| < 1$, $\text{Sup } |\chi_0| < 1$ gilt, ist (2.1) für unsere Einerkerne ψ , ψ_0 erfüllt. Somit ist $\psi(u, k_n) \psi_0(v, k_n)$ ein Produktkern auf $(R_{2l}(O))$. Nach Definition ist $\psi > 0$, $\psi_0 > 0$, und wir haben bloß noch nachzuweisen, daß ψ in $\mathfrak{U}(O)$ ein Glockenkern ist.

In der Tat gilt, wie man für $u \geq 0$ und $u < 0$ sofort verifiziert, fast überall in $L' < (L)$:

$$u \psi'(u, k_n) = - C \alpha p k_n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p_0}} |\chi(u)|^{k_n-1} |u|^p \left(1 - \frac{\omega}{\alpha} - \frac{u \omega'}{\alpha p} \right) .$$

Dies ist aber in $\mathfrak{U}(O)$ wegen (6.2) sicherlich bis auf eine Nullmenge nicht positiv. Also ist $\psi(u, k_n)$ in $\mathfrak{U}(O)$ ein positiver Glockenkern.

29. Wir zeigen jetzt, daß V c) nicht zutrifft. Zu diesem Zweck bilden wir für ein kleines $h > 0$ den Ausdruck E_n :

$$E_n = C C_0 k_n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p_0}} \int_0^h \{ |\chi_0(u)|^{k_n} - |\chi(u) \chi_0(u)|^{k_n} \} du = \\ C C_0 k_n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p_0}} \int_0^h \{ |1 - \alpha_0 u^{p_0} + \omega_0 u^{p_0}|^{k_n} - |1 - (\alpha + \alpha_0 u^{p_0-p}) u^p + \Omega(u) u^p|^{k_n} \} du . \quad (8.5)$$

Wegen $p_0 \geq p$ gilt $\Omega(u) \rightarrow 0$ ($u \rightarrow 0$).

Zunächst behandeln wir den Fall $p_0 > p$. Es sei ein positives $\varepsilon < \alpha$ vorgegeben. Sodann wähle man ein $h > 0$ so klein, daß

$$E_n \geq C C_0 k_n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p_0}} \left\{ \int_0^h (1 - (\alpha_0 + \varepsilon) u^{p_0})^{kn} du - \int_0^h (1 - (\alpha - \varepsilon) u^p)^{kn} du \right\}$$

ist. Die Produkte dieser beiden Integrale mit $k_n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p_0}}$ sind zufolge (6.3), (6.4) äquivalent

$$C_8 k_n^{\frac{1}{p}} \quad \text{bzw.} \quad C_9 k_n^{\frac{1}{p_0}} \quad (C_8, C_9 > 0, n \rightarrow \infty).$$

Da unter der Annahme $p_0 > p$ diese Ausdrücke für $n \rightarrow \infty$ einander nicht äquivalent sind und ihre Differenz nach unendlich strebt, folgt $E_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$).

Ist hingegen $p_0 = p$, so wähle man $\varepsilon > 0$ so klein, daß $\alpha + \alpha_0 - \varepsilon > 0$ und

$$\frac{1}{(\alpha_0 + \varepsilon)^{\frac{1}{p}}} > \frac{1}{(\alpha + \alpha_0 - \varepsilon)^{\frac{1}{p}}} \quad (8.6)$$

ist. Dann folgt für jedes hinreichend kleine $h > 0$ aus (8.5) für $p_0 = p$:

$$E_n \geq C C_0 k_n^{\frac{2}{p}} \left\{ \int_0^h (1 - (\alpha_0 + \varepsilon) u^p)^{kn} du - \int_0^h (1 - (\alpha + \alpha_0 - \varepsilon) u^p)^{kn} du \right\}.$$

Die Produkte dieser beiden Integrale mit $k_n^{\frac{2}{p}}$ sind vermöge (6.3), (6.4), (6.5) äquivalent

$$C C_0 \frac{1}{(\alpha_0 + \varepsilon)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) k_n^{\frac{1}{p}} \quad \text{bzw.} \quad C C_0 \frac{1}{(\alpha + \alpha_0 - \varepsilon)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) k_n^{\frac{1}{p}} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Diese Ausdrücke sind für $n \rightarrow \infty$ wegen (8.6) einander nicht äquivalent, und da ihre Differenz nach unendlich strebt, folgt wiederum $E_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). — Damit ist der Satz in allen Teilen bewiesen.

30. Anmerkung. *Sämtliche Behauptungen des Satzes VII lassen sich aufrecht erhalten, wenn (3.4) bzw. (3.2) unter Vertauschung von Integration und Differentiation angesetzt wird.*

Für den Beweis ziehen wir die im ersten Teil in § 13 aufgestellten Ver-

tauschbarkeitskriterien heran. Bezeichnet ψ_0 einen beliebigen *Stieltjes-* und ψ einen beliebigen *Stieltjes-Hahnschen* Einerkern auf (L) , so folgt unter Benutzung von (7.2) für fast alle Punkte irgendeines Rechtecks $R' < (R_{2l}(O))$

$$|\psi'(u, k_n) \psi_0(v, k_n)| \leq C_1 C_0 k_n^{1 + \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p}} |\chi(u)|^{k_n - 1} |\chi_0(v)|^{k_n} |u|^{p-1}.$$

Zu jedem Wertepaar $p, p_0 > 0$ und jedem Index n existiert eine GröÙe C_n , so daÙ der letzte Ausdruck überall auf R' kleiner ist als C_n für $p \geq 1$ und kleiner als $C_n |u|^{p-1}$ für $0 < p < 1$. Daher ist im ersten dieser beiden Fälle (1; 13.2) und im zweiten (1; 13.9) mit $\Phi'_u(u, v; n) = \psi'(u, k_n) \psi_0(v, k_n)$ fast überall auf $R' < (R_{2l}(O))$ erfüllt. Auf Grund der Kriterien I und II in den Nummern 58 und 61 des ersten Teils erkennt man jetzt die Richtigkeit obiger Behauptung für jeden der Teilsätze VII α) bis δ).

§ 9. Produktkerne vom Poisson-Hahnschen Typus

31. Als *Poissonsche* Einerkerne bezeichnen wir mit *Hahn* Einerkerne von folgendem Typus: Es sei für jeden Parameterwert $k \geq 1$

$$\psi(u, k) = C k^{\frac{1}{p}} \frac{1}{1 + k \tau(u)},$$

$$C = \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{2 \Omega(p)}, \quad \alpha > 0, \quad p > 1, \quad \Omega(p) = \int_0^\infty \frac{du}{1 + u^p},$$

$$\tau(u) = \alpha |u|^p + \omega(u) |u|^p, \quad u < (-l, l) \equiv (L),$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \omega(u) = 0.$$

ω sei meÙbar auf L , und es gelte in jedem Teilintervall $L^* < (L)$, das den Nullpunkt nicht enthält

$$\inf \tau(u) > 0^{14)}.$$

*Hahn*¹⁴⁾ hat insbesondere gezeigt, daÙ für jede Funktion $f(\xi)$ ($\xi < (L)$) aus der Klasse F_1 in jedem Stetigkeitspunkt die Relation (1; 1.1) mit $J = L$ und dem *Poissonschen* Einerkern $K = \psi(\xi - x, k)$, $n = k$ gilt.

¹⁴⁾ *H. Hahn* (I), pp. 647—655.

Ist $\psi(u, k)$ ein *Poissonscher* Einerkern, für welchen in jedem (abgeschlossenen) Intervall $L' < (L)$ die Funktion $\tau(u)$ totalstetig ist und fast überall der Ungleichung

$$|\tau'(u)| < A |u|^{p-1} \quad (u < L', \quad A = \text{Const.}) \quad (9.1)$$

genügt, so wollen wir ψ einen *Poisson-Hahnschen* Einerkern nennen.

Für einen Einerkern letzterer Art gelten nach *Hahn*¹⁴⁾ insbesondere die Relationen (1; 1.2) mit $K = \psi(\xi - x, k)$, $n = k$, $J = L$, $s = 1$ in jedem Punkt $x < (L)$ einer beliebigen Funktion $f(\xi)$, die auf L zu F_1 gehört und für $\xi = x$ differenzierbar ist.

32. Es seien jetzt mit ψ_1, ψ_2 *Poissonsche* Einerkerne bezeichnet, zu welchen bzw. die Größen $C_i, p_i, \tau_i(u), \alpha_i, \omega_i(u)$ ($i = 1, 2$) gehören mögen. Im Falle von zwei Variablen wollen wir nunmehr als Beispiel zu den Sätzen I, III, V über beliebige (nicht notwendig symmetrische) Produktkerne den folgenden Satz beweisen:

Satz VIII. *Es sei $\psi_2(v, k)$ ein Poissonscher und $\psi_1(u, k)$ ein Hahn-Poissonscher Einerkern auf (L) . $Q_0(x, y)$ bezeichne einen beliebigen aber festen Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates R_l der $\xi\eta$ -Ebene.*

$\alpha)$ *Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_l zu F_i ($i = 1, 2$) gehört und in Q_0 ein totales Differential besitzt, die Relationen (3.1), (3.2) mit $\psi = \psi_1, \varphi = \psi_2, n = k$ gelten, ist hinreichend:*

$$A] \quad \text{für } F_1: \quad \text{Es ist} \quad p_1 \geq p_2 \quad \text{und} \quad \frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1 \quad ;$$

$$B] \quad \text{für } F_2: \quad \text{Es ist} \quad p_1 \geq p_2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1 \quad .$$

$\beta)$ *Die beiden Voraussetzungen A] bzw. B] sind notwendig, wenn*

$$u \omega'_1(u) \rightarrow 0 \quad (u \rightarrow 0, \quad u \notin \mathfrak{N}) \quad (9.2)$$

gilt, wobei u für Punkte einer Nullmenge $\mathfrak{N}$ außer acht gelassen wird.

$\gamma)$ *Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_l zu F_i ($i = 1, 2$) gehört und in Q_0 stetig und H -differenzierbar nach ξ ist, die Relationen (3.1), (3.2) mit $\psi = \psi_1, \varphi = \psi_2, n = k$ gelten, ist unter der Annahme (9.2) notwendig und hinreichend, daß $\frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1$ im Falle von F_1 und $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$ im Falle von F_2 ist.*

δ) Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_i zu F_i ($i = 1, 2$) gehört und in Q_0 stetig und O -differenzierbar nach ξ ist, die Relationen (3.1), (3.2) mit $\psi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, $n = k$ gelten, ist unter den Annahmen $\omega_i(u) = \omega_i(-u)$ ($u < U(O)$; $i = 1, 2$) und (9.2) notwendig und hinreichend:

$$C] \text{ für } F_1: \text{ Es gilt } \frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \leq 1 ;$$

$$D] \text{ für } F_2: \text{ Es gilt } \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \leq 1 .$$

Zusatz zu δ). Die Voraussetzung $\frac{1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \leq 1$ ist auch notwendig, wenn $\omega_i(u) \neq \omega_i(-u)$ ist und wenn an die Stelle von F_i ($i = 1, 2$) die Klasse der auf R_i stetigen Funktionen tritt.

33. Vorgängig dem Beweis des Satzes VIII sollen in dieser und der nächsten Nummer einige darin oft vorkommende Integrale abgeschätzt werden. Dabei werden wir immer wieder Integrale von der Gestalt

$$J = \int_0^h \frac{u^q}{(1 + k\beta u^p)^m} du \quad (9.3)$$

vermöge der Substitution $z = 1 + k\beta u^p$ überführen in

$$J = \frac{C}{k^{\frac{q+1}{p}}} \int_1^{1+k\beta h^p} \frac{(z-1)^{\frac{q}{p} + \frac{1}{p} - 1}}{z^m} dz \quad (C > 0) . \quad (9.4)$$

Allgemein werden hier und im folgenden mit C, C'_1, C''_2 usw. Größen bezeichnet, die nur von Parametern abhängen, welche im Laufe unserer Diskussion konstant gehalten werden. Insbesondere seien diese Größen stets von den mit h und k bezeichneten Parametern unabhängig.

34. Zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ existiert ein $h' > 0$, so daß für alle $u < \langle -h', h' \rangle$ und alle $k \geq 1$

$$\frac{1}{1 + k(\alpha_i + \varepsilon) |u|^{p_i}} < \frac{1}{1 + k\tau_i(u)} < \frac{1}{1 + k(\alpha_i - \varepsilon) |u|^{p_i}} \\ (u < \langle -h', h' \rangle ; i = 1, 2) \quad (9.5)$$

gilt. Daher ist für alle hinreichend kleinen $h > 0$

$$J_1 = \int_{-h}^h \frac{|u|^{p_1-1}}{(1+k\tau_1(u))^2} du \geq 2 \int_0^h \frac{u^{p_1-1}}{(1+k\beta u^{p_1})^2} du ,$$

worin $\geq$ bedeuten soll, daß für eine geeignete Konstante $\beta > 0$ das obere und für eine andere Konstante $\beta > 0$ das untere Zeichen für alle $k \geq 1$ gilt. Unter Benutzung von (9.3), (9.4) ergibt sich daher für geeignete Konstanten C'_1

$$J_1 \geq \frac{C'_1}{k} \int_1^{1+k\beta h^{p_1}} \frac{dz}{z^2} = \frac{C'_1}{k} g(h, k) , \quad g(h, k) = \frac{k\beta h^{p_1}}{1+k\beta h^{p_1}} ,$$

wobei $g(h, k)$ für $h > 0$, $k \geq 1$ positiv und < 1 ist. Wir notieren noch, daß für jedes feste $h > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(h, k) = 1 \quad (9.6)$$

gilt.

Es seien wiederum $\varepsilon > 0$ und $h'(\varepsilon) \equiv h'$ so gewählt, daß (9.5) gilt. Mit Hilfe obiger Substitution und unter Verwendung geeigneter Konstanten erhält man sodann für irgendein $h < (0, h')$:

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{-h}^h \frac{|v|}{1+k\tau_2(v)} dv \geq 2 \int_0^h \frac{v}{1+k\beta v^{p_2}} dv = C'_2 k^{-\frac{2}{p_2}} \int_1^{1+k\beta h^{p_2}} \frac{(z-1)^{\frac{2}{p_2}-1}}{z} dz = \\ &= C''_2 k^{-\frac{2}{p_2}} + C'_2 k^{-\frac{2}{p_2}} \int_2^{1+k\beta h^{p_2}} \frac{(z-1)^{\frac{2}{p_2}-1}}{z} dz . \end{aligned} \quad (9.7)$$

Wir schätzen J_2 zuerst nach unten ab und erhalten für ein gewisses C''_2 und alle $k > k_1(h) \equiv \beta^{-1} h^{-p_2}$:

$$0 < C''_2 k^{-\frac{2}{p_2}} < J_2 \quad (k > k_1(h)) . \quad (9.8)$$

Eine Abschätzung nach oben führen wir für $k \leq k_1$ und $k > k_1$ getrennt durch. Im ersten Fall ist $J_2 < C''_2 k^{-\frac{2}{p_2}}$ für ein passendes C''_2 , und im zweiten ist der Ausdruck (9.7) kleiner als

$$k^{-\frac{2}{p_2}} \left(C''_2 + C'_2 \int_2^{1+k\beta h^{p_2}} (z-1)^{\frac{2}{p_2}-2} dz \right) = \begin{cases} k^{-\frac{2}{p_2}} (C''_2 + s_1(h) k^{\frac{2}{p_2}-1}) & \text{für } p_2 \neq 2 \\ k^{-1} (s_2(h) + C'_2 \lg k) & \text{für } p_2 = 2 \end{cases}$$

Somit ergibt sich als eine obere Schranke von J_2 für jedes $h < (0, h')$ und alle $k \geq 1$

$$J_2 < A \cdot \text{Max} \left(\frac{1}{k^{\gamma}}, \frac{1}{k^{\frac{2}{p_2}}} \right).$$

Hierin bedeutet γ eine beliebige Zahl aus dem Intervall $(0, 1)$ und A eine Größe, die von ε , h und p_2 abhängt.

Analog erhält man, wieder unter Verwendung von (9.3), (9.4) für alle $p_1 > 1$:

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_{-h}^h \frac{|u|^{p_1}}{(1 + k \tau_1(u))^2} du < 2 \int_0^h \frac{u^{p_1}}{(1 + k \beta u^{p_1})^2} du = \\ &= \frac{C_3}{k^{1 + \frac{1}{p_1}}} \int_1^{1 + k \beta h^{p_1}} \frac{(z-1)^{\frac{1}{p_1}}}{z^2} dz < \frac{C'_3}{k^{1 + \frac{1}{p_1}}} \end{aligned}$$

und für alle $p_2 > 1$:

$$J_4 = \int_{-h}^h \frac{dv}{1 + k \tau_2(v)} < 2 \int_0^h \frac{dv}{1 + k \beta v^{p_2}} = \frac{C_4}{k^{\frac{1}{p_2}}} \int_1^{1 + k \beta h^{p_2}} \frac{(z-1)^{\frac{1}{p_2}-1}}{z} dz < \frac{C'_4}{k^{\frac{1}{p_2}}}.$$

Bezeichnen schließlich c , d Größen, für welche $|c|$, $|d| < l$, $0 \nless \langle c, d \rangle$ ist, so gilt, wie man sich an Hand der Definition von $\tau_2(v)$ direkt überlegt:

$$J_5 = \int_c^d \frac{dv}{1 + k \tau_2(v)} \geq \frac{C_5}{k} > 0. \quad -$$

§ 10. Beweis des Satzes VIII, erste Hälfte

35. Wieder wird es genügen, unsere Behauptungen für den Fall zu beweisen, daß k über eine beliebige Zahlenfolge $k_n \geq 1$ ($n = 1, 2, \dots$) nach unendlich strebt.

Aus den Voraussetzungen in α), γ) oder δ) für irgendeine der Funktionsklassen F_i ($i = 1, 2$) folgt, daß in jedem dieser Fälle $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$ gilt. Daher gilt gleichmäßig in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Rechteck $R^* < (R_{2l}(O))$:

$$\varphi_1(u, k_n) \varphi_2(v, k_n) = C^* k_n^{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} \frac{1}{1 + k_n \tau_1(u)} \cdot \frac{1}{1 + k_n \tau_2(v)} \Rightarrow 0 \quad (k_n \rightarrow \infty).$$

(2.1) ist also für $\psi=\psi_1$ und $\varphi=\psi_2$ erfüllt, und somit ist $\psi_1(u, k_n) \psi_2(v, k_n)$ ein Produktkern auf $(R_{2l}(O))$.

36. Beweis der Behauptungen $\alpha)$ und $\beta)$. Um Satz I für den Beweis von $\alpha)$ anwenden zu können, werden jetzt die Voraussetzungen dieses Satzes unter den Annahmen von $\alpha)$ als erfüllt nachgewiesen.

Wir beginnen mit Ia^o) für F_1 und haben also zu zeigen, daß der zu $\psi'_1(u, k_n) \psi_2(v, k_n)$ gehörige gelochte Kern auf jedem Rechteck $R' < (R_{2l}(O))$ fast beschränkt ist, oder — was dasselbe bedeutet — daß $\psi'_1(u, k_n) \psi_2(v, k_n)$ diese Eigenschaft auf jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Rechteck $R^* < (R_{2l}(O))$ besitzt. Für $\psi_1(u, k_n)$ ergibt sich mit Hilfe von (9.1) die fast überall in $L' < (L)$ gültige Abschätzung

$$|\psi'_1(u, k_n)| = C_1 k_n^{1+\frac{1}{p_1}} \frac{|\tau'_1(u)|}{(1+k_n \tau_1(u))^2} < C''_1 k_n^{1+\frac{1}{p_1}} \frac{|u|^{p_1-1}}{(1+k_n \tau_1(u))^2}.$$

Daher gilt für jedes Rechteck $R' < (R_{2l}(O))$ fast überall

$$|\psi'_1(u, k_n) \psi_2(v, k_n)| < C_0 k_n^{1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}} \frac{|u|^{p_1-1}}{(1+k_n \tau_1(u))^2} \cdot \frac{1}{1+k_n \tau_2(v)} (k_n \geq 1). \quad (10.1)$$

Der letzte Ausdruck ist wegen $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$ gleichmäßig beschränkt für alle $k_n \geq 1$ und alle Punkte jedes Rechtecks $R^* < (R_{2l}(O))$, das die v -Achse nicht trifft. Also ist fast überall

$$|\psi'_1(u, k_n) \psi_2(v, k_n)| < C'_0 \quad (P(u, v) < R^*, P(0, v) \nless R^*, k_n \geq 1). \quad (10.2)$$

Wir dürfen uns daher auf Rechtecke R^*_0 beschränken, deren Ecken die Koordinaten

$$(-h, a), (h, a), (h, b), (-h, b) \quad (0 \nless \langle a, b \rangle; |a|, |b| < l) \quad (10.3)$$

für ein kleines $h > 0$ besitzen. In einem derartigen Rechteck ist die rechte Seite von (10.1) kleiner als

$$C''_0 k_n^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}} \frac{|u|^{p_1-1}}{(1+k_n \beta |u|^{p_1})^2}. \quad (10.4)$$

für geeignete Konstanten $\beta, C''_0 > 0$. Durch Nullsetzen der Ableitung dieses Ausdrucks nach $|u|$ erhält man für $|u|^{p_1}$ den einzigen von 0

verschiedenen Wert $C_0^{(3)} k_n^{-1}$, durch den die Ableitung selbst fallend hindurchgeht, so daß diesem Wert das absolute Maximum des Bruchfaktors in (10.4) entspricht. Der Wert des Maximums von (10.4) ergibt sich daher zu

$$C_0^{(4)} k_n^{\frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1}, \quad (10.5)$$

und dies ist wegen der zweiten Voraussetzung A] gleichmäßig beschränkt für alle $k_n \geq 1$. Daher ist die linke Seite von (10.1) auf R_0^* fast beschränkt, und damit ist bewiesen, daß Ia°) für F_1 zutrifft.

37. Wir schließen hier gleich den Beweis der Behauptung in β) an, daß im Falle von F_1 die zweite Voraussetzung A] notwendig ist.

Es gilt fast überall in $L' < (L)$, wie man für $u \geq 0$ und $u < 0$ leicht verifiziert:

$$|\tau'_1(u)| = \alpha_1 p_1 |u|^{p_1-1} \left| 1 + \frac{\omega_1(u)}{\alpha_1} + \frac{\omega'_1(u)}{\alpha_1 p_1} u \right|.$$

Unter Benutzung von (9.2) folgt hieraus, daß in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes fast überall

$$|\tau'_1(u)| > \frac{\alpha_1 p_1}{2} |u|^{p_1-1}$$

ist. Daher gilt fast überall in einem Rechteck R_0^* von der Gestalt (10.3) mit hinreichend kleinem $h > 0$:

$$|\psi'_1(u, k_n) \psi_2(v, k_n)| > C_0^{(5)} k_n^{1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} \frac{|u|^{p_1-1}}{(1 + k_n \tau_1(u))^2} \cdot \frac{1}{1 + k_n \tau_2(v)} \quad (k_n \geq 1), \quad (10.6)$$

wobei $C_0^{(5)}$ eine von h unabhängige Konstante ist. Dabei mögen für R_0^* die Größen $|a|$ und $|b|$ von vornherein so klein angenommen werden, daß $|\tau_2(v)| < \text{const.}$ für $v < \langle a, b \rangle$ gilt. Für geeignete β , $C_0'' > 0$ ist sodann (10.4) auf R_0^* kleiner als der letzte Ausdruck, und für eine geeignete Konstante $C_0^{(4)}$ stellt (10.5) wieder das Maximum der bei konstant gehaltenem k_n stetigen Funktion (10.4) in $|u|$ dar. Unter der Voraussetzung $\frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$ wächst aber dieses Maximum mit $k_n \rightarrow \infty$ über alle Grenzen, so daß also $|\psi'_1 \psi_2|$ auf R_0^* nicht gleichmäßig für fast alle Punkte und alle $k_n \geq 1$ beschränkt sein kann. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit der zweiten Voraussetzung in A].

38. Wir beweisen jetzt, daß $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$ für das Zutreffen von Ia°) für F_2 hinreichend und notwendig ist. Ia°) für F_2 ist mit der Forderung gleichbedeutend, daß $\int |\psi'_1(u, k_n) \psi_2(v, k_n)| dP$ gleichgradig totalstetig ist auf jedem Rechteck $R^* < (R_{2l}(O))$, das den Nullpunkt nicht enthält. Diese Eigenschaft ist wegen (10.2) sicher auf jedem Rechteck $R^* < (R_{2l}(O))$ erfüllt, das die v -Achse nicht trifft. Wir können uns daher von vornherein auf das Rechteck R_0^* von der Gestalt (10.3) beschränken. Unsere Voraussetzungen sind also als hinreichend erkannt, wenn wir zeigen können, daß zu jedem $\mu > 0$ ein $k(h, \mu)$ existiert, so daß für alle $k_n > k(h, \mu)$

$$G_h \equiv \int_{R_0^*} |\psi'_1(u, k_n) \psi_2(v, k_n)| du dv < \mu \quad (k_n > k(h, \mu)) \quad (10.7)$$

gilt.

Ein Blick auf (10.1) lehrt, daß

$$G_h < C_0 k_n^{1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} J_1 J_5$$

ist, so daß man unter Berücksichtigung der in Nummer 34 für J_1, J_5 gefundenen Abschätzungen

$$G_h < C_0 C_1' C_5 g(h, k_n) k_n^{1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} k_n^{-2} \quad (k_n \geq 1)$$

erhält. Wegen $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$ und der gleichmäßigen Beschränktheit von $g(h, k_n)$ folgt $G_h \rightarrow 0$ ($k_n \rightarrow \infty$), womit (10.7) bewiesen ist.

39. Um die Notwendigkeit der Bedingung $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$ zu beweisen, werden wir unter der Annahme $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \geq 1$ zeigen, daß es ein $\mu > 0$ und Rechtecke R_0^* beliebig kleinen Inhaltes gibt, für welche (10.7) nicht erfüllt ist. Zu diesem Zweck mögen die Koordinaten a, b in (10.3) konstant gehalten werden, während wir h nach 0 abnehmen lassen.

Wegen (10.6) ist

$$G_h > C_0^{(5)} k^{1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} J_1 J_5 > C_0^{(5)} C_1' C_5 g(h, k_n) k_n^{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1} \quad (k_n \geq 1),$$

und zufolge (9.6) existiert eine von h abhängige GröÙe $k_0(h)$, so daß man unter Beachtung von $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1 \geq 0$ für alle $k_n > k_0$

$$G_h > \frac{C_0^{(5)} C_1' C_5}{2} \quad (k_n > k_0(h))$$

erhält. Für $\mu = \frac{1}{2} C_0^{(5)} C_1' C_5$ ist (10.7) nicht erfüllt, wie klein auch $h > 0$ gewählt wurde. Also ist $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$ eine notwendige Bedingung.

Das Erfülltsein von $Ic_1)$ und $c_2)$ für $\varrho = 1$ und $p_i > 1$ ($i = 1, 2$) ist bereits von *Hahn*¹⁵⁾ (bei der Diskussion des eindimensionalen Problems) nachgewiesen worden.

40. Wir beweisen nunmehr das Zutreffen von $Ib_1)$ und $b_2)$. Unter Beachtung von (10.1) erhält man für alle $k_n \geq 1$

$$\int_{-h}^h \int_{-h}^h |u \psi_1'(u, k_n) \psi_2(v, k_n)| du dv < C_0 k_n^{1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} J_3 J_4 \quad (k_n \geq 1),$$

und dies ist für $k_n \rightarrow \infty$ beschränkt. — Andererseits erhält man wieder wegen (10.1) für alle $k_n \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \int_{-h}^h |\psi_1'(u, k_n) v \psi_2(v, k_n)| du dv &< C_0 k_n^{1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} J_1 J_2 < \\ &< k_n^{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} C_0 C_1' g(h, k_n) A \cdot \text{Max} \left(\frac{1}{k_n^\gamma}, \frac{1}{k_n^{\frac{2}{p_2}}} \right) \quad (k_n \geq 1). \end{aligned}$$

Wählt man jetzt γ so, daß $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < \gamma < 1$ ist, so ist der letzte Ausdruck wegen (9.6) und $p_1 \geq p_2$ beschränkt, gleichmäßig für alle $k_n \geq 1$. Damit ist $Ib_1)$ und $b_2)$, und somit auch Behauptung $\alpha)$ unseres Satzes bewiesen. — Wir wollen noch bemerken, daß hier beim Nachweis von $Ib_2)$ zum erstenmal $p_1 \geq p_2$ benötigt wurde.

41. Behauptung $\beta)$ wird vollständig bewiesen sein, wenn noch die Notwendigkeit der Bedingung $p_1 \geq p_2$ erkannt ist. Da (10.6) auch auf einem Quadrat $R_{2h}(O)$ mit einem hinreichend kleinen $h > 0$ richtig ist, erhält man unter Beachtung von (9.8):

$$\int_{-h}^h |\psi_1'(u, k_n) v \psi_2(v, k_n)| du dv > C_0^{(5)} k_n^{1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} J_1 J_2 > C_0^{(6)} g(h, k_n) k_n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} > 0 \quad (k_n > k_1).$$

Für $k_n \rightarrow \infty$ gilt $g(h, k_n) \rightarrow 1$, und somit strebt der ganze Ausdruck nach unendlich, so daß $Ib_2)$ nicht gelten könnte.

¹⁵⁾ *H. Hahn* (I), pp. 647—649.

§ 11. Beweis des Satzes VIII, zweite Hälfte

42. Beweis der Behauptungen γ) und δ). Für den Beweis von γ) haben wir uns auf Satz III zu beziehen. Da im obigen Ia°), b_1), c_1), c_2) als zutreffend befunden wurden, und zwar ohne Benutzung der Voraussetzung $p_1 \geq p_2$ und da andererseits, wie gezeigt wurde, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$, $\frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1$ für die Gültigkeit von Ia°) im Falle von F_1 bzw. F_2 notwendig ist, ist Behauptung γ) somit bewiesen.

Um δ) zu beweisen, haben wir Satz V anzuwenden. Zunächst wollen wir feststellen, daß (4.1), (4.2) für ψ_2 bzw. ψ_1 erfüllt ist. Die Geradheit dieser Einerkerne in $\mathfrak{U}(O)$ haben wir vorausgesetzt. Nach Definition ist $\psi_2 \geq 0$.

Andererseits gilt fast überall in $L' < (L)$, wie man für $u \geq 0$ und $u < 0$ verifiziert:

$$u \psi_1'(u, k_n) = -C_1 \alpha_1 p_1 k_n^{1+\frac{1}{p_1}} \frac{|u|^{p_1}}{(1 + k_n \tau_1(u))^2} \left(1 + \frac{\omega_1}{\alpha} + \frac{\omega_1'}{\alpha p} u \right),$$

und dies ist fast überall in $\mathfrak{U}(O)$ wegen (9.2) nicht positiv. ψ_2 ist also in $\mathfrak{U}(O)$ positiv und gerade und ψ_1 ein gerader Glockenkern, wie in Satz V verlangt wird.

43. Daß Va°) für F_1 und F_2 sowie Vb_1) und b_2) zutreffen, wurde bereits unter α) bewiesen. Wir haben dort allerdings $p_1 \geq p_2$ vorausgesetzt, eine Relation, die jetzt aus der zweiten Voraussetzung in C] bzw. D] folgt. Es ist also noch Vc) nachzuweisen, wozu wir das Konvergenzverhalten von

$$E_n = \int_0^h \psi_2(u, k_n) [\psi_1(0, k_n) - \psi_1(u, k_n)] du$$

zu untersuchen haben.

Es gilt

$$\begin{aligned} \psi_1(0, k_n) \psi_2(u, k_n) - \psi_1(u, k_n) \psi_2(u, k_n) &= \\ = C^* k_n^{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} \left\{ \frac{1}{1 + k_n \tau_2} - \frac{1}{(1 + k_n \tau_1)(1 + k_n \tau_2)} \right\} &= \\ = C^* k_n^{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} \frac{k_n \tau_1}{(1 + k_n \tau_1)(1 + k_n \tau_2)}. \end{aligned}$$

Wir wählen jetzt ein $\varepsilon > 0$. Dann kann für hinreichend kleine $h > 0$ vermöge (9.5) stets erreicht werden, daß E_n für gewisse positive Konstanten β_1, β_2, C_6 größer bzw. für andere positive Konstanten β_1, β_2, C_6 kleiner ist als

$$C_6 k_n^{1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}} \int_0^h \frac{u^{p_1}}{(1+k_n \beta_1 u^{p_1})(1+k_n \beta_2 u^{p_2})} du.$$

Die Substitution

$$z = k_n u^{p_1}, \quad u = z^{\frac{1}{p_1}} k_n^{-\frac{1}{p_1}}, \quad du = \frac{1}{p_1} z^{\frac{1}{p_1}-1} k_n^{-\frac{1}{p_1}} dz$$

führt diesen Ausdruck über in

$$C_6' k_n^{\frac{1}{p_2}} \int_0^{k_n h^{p_1}} \frac{z^{\frac{1}{p_1}}}{(1+\beta_1 z)(1+\beta_2 k_n^{1-\frac{p_2}{p_1}} z^{\frac{p_2}{p_1}})} dz,$$

so daß wir schreiben können:

$$E_n \geq C_6' k_n^{\frac{1}{p_2}+\frac{p_2}{p_1}-1} \int_0^{k_n h^{p_1}} \frac{z^{\frac{1}{p_1}}}{(1+\beta_1 z)(k_n^{\frac{p_2}{p_1}-1} + \beta_2 z^{\frac{p_2}{p_1}})} dz. \quad (11.1)$$

Das letzte Integral ist kleiner als

$$S_n = \int_0^{k_n h^{p_1}} \frac{1}{\beta_2 (1+\beta_1 z) z^{\frac{p_2-1}{p_1}}} dz.$$

Aus $\frac{1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \leq 1$ folgt erstens, daß $0 < \frac{p_2-1}{p_1} < 1$ gilt und also S_n beschränkt ist für $k_n \rightarrow \infty$, und zweitens, daß daher die rechte Seite von (11.1) ebenfalls beschränkt ist für $k_n \rightarrow \infty$. Die Voraussetzungen in δ) sind also für die Behauptung δ) hinreichend.

44. Die Notwendigkeit der ersten Bedingung in C) bzw. D) für die Gültigkeit von Va°) ist bereits unter β) bewiesen worden. — Wäre die zweite Bedingung C) bzw. D) nicht erfüllt und also $\frac{1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} > 1$, so betrachte man zunächst den Fall $p_1 \geq p_2$. Unter dieser Annahme ist der Wert des Integrals in (11.1) größer als

$$T_n = \int_0^{k_n h^{p_1}} \frac{z^{\frac{1}{p_1}}}{(1 + \beta_1 z) \left(C_7 + \beta_2 z^{\frac{p_2}{p_1}} \right)} dz .$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n \neq 0$ ist, divergiert die rechte Seite von (11.1) nach unendlich und daher für geeignete Konstanten auch E_n , so daß Vc) nicht erfüllt sein kann.

Sei endlich $p_2 > p_1$. Das Integral in (11.1) ist jetzt für hinreichend große k_n größer als

$$C_8 \int_1^2 \frac{z^{\frac{1}{p_1}}}{k_n^{\frac{p_2}{p_1} - 1}} dz = \frac{C_8'}{k_n^{\frac{p_2}{p_1} - 1}} ,$$

und daher ist die rechte Seite von (11.1) und somit für geeignete Konstanten auch E_n wenigstens wie $\text{Const.} \cdot k_n^{\frac{1}{p_2}}$ divergent. Wieder könnte Vc) nicht erfüllt sein. —

45. Beweis des Zusatzes zu δ). Wir haben soeben festgestellt, daß $\frac{1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \leq 1$ für das Bestehen von Vc) notwendig ist, und nach Nummer 14 ist dies auch noch der Fall, wenn $\omega_i(u) \neq \omega_i(-u)$ gilt. Ferner sei daran erinnert, daß Vc) mit 1,VIII d) äquivalent ist. In Nummer 1, 55 haben wir aber festgestellt, daß 1,VIII d) für das Bestehen von (1; 10.2) bzw. (3.2) auch dann notwendig ist, wenn F_i ($i = 1, 2$) durch die Klasse der auf R_i stetigen Funktionen ersetzt wird. — Damit ist Satz VIII in allen Teilen bewiesen.

46. Anmerkung. Alle Behauptungen des Satzes VIII bleiben wahr, wenn in (3.4) die Integration mit der Differentiation vertauscht angesetzt wird. Dies ergibt sich sofort daraus, daß (1; 13.2) mit $\Phi(u, v; n) = \psi_1(u, k_n) \psi_2(v, k_n)$ wegen (10.1) und $p_1 > 1$ erfüllt ist und somit das Kriterium I in Nummer 58 des ersten Teils Anwendung findet.

47. Folgerungen aus δ). Ist $f(\xi, \eta)$ auf R_i stetig und nach einer beliebigen der beiden Variablen ξ, η O -differenzierbar in Q_0 , so hätte man für einen in bezug auf ξ und η symmetrisch formulierten Satz δ) neben $\frac{1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \leq 1$ auch $\frac{1}{p_1} + \frac{p_1}{p_2} \leq 1$ vorauszusetzen, was offenbar nicht miteinander verträglich ist. Es existiert also kein aus zwei *Poisson*-

Hahnschen Einerkernen gebildeter Produktkern mit der gewünschten Eigenschaft.

Analog verhalten sich auch drei- und mehrdimensionale *Poisson-Hahnsche* Produktkerne. Es seien z. B. im Falle von $m = 3$ Dimensionen die Einerkerne mit ψ_1, ψ_2, ψ_3 bezeichnet. Für die Gültigkeit des dem Satze δ) entsprechenden Differentiationssatzes müßte die Relation (5.1) mit $m = 3$ vorausgesetzt werden, oder — wie der Satz in Nummer 18 besagt — zwei Relationen (4.3), nämlich mit $\psi = \psi_1, \varphi = \psi_2$ und $\psi = \psi_1, \varphi = \psi_3$. Diese Ungleichungen könnten aber, wie wir in Nummer 44 für die eine von ihnen gesehen haben, nur gelten, wenn $\frac{1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \leq 1, \frac{1}{p_3} + \frac{p_3}{p_1} \leq 1$ ist. Für einen in bezug auf drei Variable symmetrischen Differentiationssatz im Falle der O -Ableitung müßte man daher die sämtlichen Relationen $\frac{1}{p_i} + \frac{p_i}{p_k} \leq 1 \quad (i, k = 1, 2, 3)$ voraussetzen. Da sich diese aber teilweise widersprechen, ist unser Ansatz zum Scheitern verurteilt.

Verzeichnis der besonderen Termini

Die Zahlenpaare hinter den angeführten Bezeichnungen sind so zu verstehen, daß die erste Zahl auf den 1. oder 2. Teil dieser Beiträge verweist, während die zweite sich auf die Nummer am Rande des Textes bezieht.

Einerkern 2, 5 2, 11	<i>Poisson-Hahnscher</i> Einerkern 2, 31
F_1, F_2 1, 4	<i>Poissonsscher</i> Produktkern 2, 31
fast beschränkt 1, 10	positiver gerader Einerkern 2, 11
Fundamentallemma 1, 13	Produktkern 2, 5 2, 17
gelochte Funktion 1, 24	Quadrat R_l 1, 28 und <i>Fußnote</i> 1, 12
gelochter Kern 1, 14 1, 29	(R) 1, 10; $R_h(Q)$ 1, 14;
gleichgradig totalstetig 1, 11	$(R_{2l}(O))$ 1, 28 2, 5
gleichmäßig eine H -Ableitung 1, 49	q -strebzig 1, 14 1, 29 2, 5
gleichmäßig eine O -Ableitung 1, 56	<i>Stieltjes-Hahnscher</i> Produktkern 2, 20
gleichmäßig ein totales Differential 1, 26	<i>Stieltjesscher</i> Produktkern 2, 20
Glockenkern (gerader) 2, 11	symmetrischer Produktkern 2, 5
H -Ableitung, H -Differenzierbarkeit 1, 8	totales Differential 1, 6
integrieren, <i>Fußnote</i> 1, 10	totalstetiger Einerkern 2, 5
Kern 1, 10 2, 5 2, 17	Totalstetigkeit des <i>Lebesgueschen</i> Integrals 1, 11
klassische Kerne, <i>Fußnote</i> 2, 1	U -Ungleichung 1, 51
limitär orthogonal 1, 12	Verschiebungseigenschaft 1, 30
nullstrebzig 1, 12	Verschiebungskern 1, 28 1, 29
N -Ungleichung 1, 15 1, 29 2, 5	V -Ungleichung 1, 51
O -Ableitung, O -Differenzierbarkeit 1, 7	

(Eingegangen den 20. Oktober 1947.)

Curriculum vitae

Am 10. September 1916 wurde ich, Rolf Conzelmann, als Sohn des Fritz Conzelmann, Postbeamter, und seiner Gattin Sophie, geb. Meyer, in meiner Heimatstadt Basel geboren.

Hier durchlief ich die staatlichen Schulen und erlangte den Maturitätsausweis am Mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium im Frühjahr 1936. Anschließend begann ich meine Studien an der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel. Ich setzte mir meine Ausbildung als Lehrer in den Fächern Mathematik, Physik, Zoologie und Botanik zum Ziel. 1940 bestand ich den fachwissenschaftlichen Teil des Mittellehrer- und 1943 denjenigen des Oberlehrerexamens. Im Besitz des Mittellehrerdiploms, nach Absolvierung des kantonalen Seminarkurses 1940/41, übernahm ich freie und feste Vikariate an verschiedenen Basler Gymnasien. Diese Lehrtätigkeit sowie Einberufungen zum Militärdienst hatten für mein Studium längere Unterbrüche zur Folge.

Meine Nebenfachexamina in Botanik und Zoologie legte ich 1943, dasjenige in Experimentalphysik 1945 ab. Vom Herbst 1943 an war ich während drei Semestern als Assistent am Mathematischen Seminar bei Herrn Prof. Ostrowski tätig. Unter seiner Anleitung entstand 1945 die vorliegende Dissertation.

Während der Studienzeit besuchte ich Vorlesungen und Praktika folgender Herren Proff. und Drs.: *P. Buchner, J. Burckhardt, R. Flatt, R. Geigy, P. Häberlin, A. Hagenbach, E. Handschin, H. Hediger, W. Matthies, E. Miescher, Th. Niethammer, A. Ostrowski, A. Portmann, E. Schubarth, O. Schüepp, G. Senn, A. Speiser, O. Spieß, W. Vischer, M. Wehrli, H. Zickendraht.*

Allen meinen Lehrern, insbesondere Herrn Prof. *Ostrowski*, möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

